

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Nationale Polytechnique d'Alger



Département d'Électrotechnique

Analyse des réseaux électriques

Compte rendu de travaux pratiques

Développement d'une boîte à outils MATLAB :
matrices Y_{bus} et Z_{bus} , écoulement de puissance
et stabilité transitoire

Réalisé par :

LAGHA Khalil Ellah

Encadré par :

Pr. A. HELLAL

Année universitaire 2024-2025

Résumé

Ce rapport présente une boîte à outils MATLAB d'analyse des réseaux électriques développée dans le cadre des travaux pratiques du module. Elle regroupe la construction des matrices d'admittance $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ et d'impédance $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$, la résolution de l'écoulement de puissance par trois méthodes numériques (Gauss-Seidel, Newton-Raphson et découplé rapide) et l'étude de la stabilité transitoire selon le modèle classique. L'ensemble est piloté par une interface graphique et doublé de scripts d'exécution automatisée qui reproduisent l'intégralité des résultats présentés.

Les méthodes sont d'abord établies puis évaluées sur quatorze systèmes de test couvrant des réseaux de 3 à 118 nœuds, dont les réseaux de référence IEEE 14, 30, 57 et 118. Trois résultats principaux se dégagent. D'abord, la $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ construite par addition successive de branches coïncide avec $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}$ à la précision de la double précision (10^{-12} à 10^{-16}) sur tout réseau possédant un ancrage à la terre, transformateurs à prise et lignes parallèles compris, ce qui valide simultanément les deux chaînes de construction. Ensuite, les trois méthodes d'écoulement de puissance convergent sur l'ensemble des systèmes et s'accordent à mieux que 2×10^{-4} p.u. en module de tension, en reproduisant quantitativement leurs comportements théoriques respectifs : convergence quadratique de Newton-Raphson en 3 à 5 itérations, itérations bon marché mais plus nombreuses du découplé rapide, convergence linéaire de Gauss-Seidel dont le coût croît avec la taille et le conditionnement du réseau. Enfin, l'étude de stabilité transitoire du réseau à 6 nœuds situe le temps critique d'élimination du défaut entre 0,45 et 0,50 s, en accord avec la lecture du critère des aires égales.

Mots-clés : réseaux électriques, matrice d'admittance nodale, matrice d'impédance nodale, écoulement de puissance, Gauss-Seidel, Newton-Raphson, découplé rapide, stabilité transitoire, temps critique d'élimination, MATLAB.

Table des matières

Nomenclature	iv
1 Introduction	1
1.1 Objet du travail	1
1.2 Démarche de validation	1
1.3 Organisation du rapport	1
2 Architecture du programme et modèle de données	1
2.1 Structure générale	1
2.2 Modèle de données	2
3 Construction des matrices Y_{bus} et Z_{bus}	3
3.1 Matrice d'admittance nodale	3
3.2 Matrice d'impédance nodale par méthode directe	3
4 Méthodes d'écoulement de puissance	4
4.1 Le problème à résoudre	4
4.2 Méthode de Gauss-Seidel	4
4.3 Méthode de Newton-Raphson	5
4.4 Méthode découplée rapide	5
5 Analyse de stabilité transitoire	5
5.1 Modèle classique	6
5.2 Séquence du défaut	6
5.3 Équation du mouvement et intégration	6
6 Résultats et discussion	6
6.1 Concordance de la Z_{bus} directe avec Y_{bus}^{-1}	6
6.2 Écoulement de puissance : convergence et coût	7
6.3 Solution détaillée : réseau IEEE 14 nœuds	8
6.4 Stabilité transitoire et temps critique d'élimination	10
7 Conclusion	11
A Systèmes de test intégrés	12
B Organisation des fichiers	13

Table des figures

1	Interface graphique de la boîte à outils, développée sous App Designer.	2
2	En haut : nombre d'itérations des trois méthodes sur les quatorze systèmes. En bas : écart $\max \mathbf{Z}_{\text{bus}} - \mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1} $ en échelle logarithmique pour tous les réseaux possédant un ancrage à la terre, tous très en dessous du seuil numérique de 10^{-10}	9
3	Stabilité transitoire du réseau à 6 nœuds : angles rotoriques relatifs $\delta_i - \delta_1$ après un défaut au nœud 6 éliminé à $t_{cr} = 0,2$ s par ouverture de la ligne 4–6.	10
4	Angle relatif $\delta_2 - \delta_1$ pour différents temps d'élimination. Plus le défaut persiste, plus l'excursion angulaire de la première oscillation croît, jusqu'à la perte de synchronisme entre 0,45 et 0,50 s.	11

Liste des tableaux

2	Écart entre la $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ construite par addition de branches et $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}$	7
3	Convergence et coût des trois méthodes d'écoulement de puissance. La tolérance ε et le nombre maximal d'itérations sont propres à chaque système ; les temps sont indicatifs, mesurés sur une machine de bureau.	8
4	Réseau IEEE 14 nœuds : solution de l'écoulement de puissance obtenue par Newton-Raphson.	9
5	Réseau à 6 nœuds, défaut au nœud 6 : influence du temps d'élimination sur l'excursion angulaire maximale.	10
6	Les quatorze systèmes de test disponibles dans la boîte à outils.	12
7	Organisation des scripts MATLAB.	13

Nomenclature

N	Nombre de nœuds du réseau	–
$\mathbf{Y}_{\text{bus}}$	Matrice d'admittance nodale	p.u.
$\mathbf{Z}_{\text{bus}}$	Matrice d'impédance nodale	p.u.
V_i, θ_i	Module et argument de la tension au nœud i	p.u., rad
$S_i = P_i + jQ_i$	Puissance apparente injectée au nœud i	p.u.
y	Admittance série d'une branche	p.u.
B	Demi-susceptance de charge d'une ligne	p.u.
a	Rapport de transformation (prise)	–
$\mathbf{J}$	Matrice jacobienne	–
$\mathbf{B}', \mathbf{B}''$	Matrices constantes du découplé rapide	p.u.
E'	Force électromotrice transitoire d'une machine	p.u.
X'_d	Réactance transitoire d'axe direct	p.u.
H	Constante d'inertie	s
δ	Angle rotorique	rad ou °
P_m, P_e	Puissances mécanique et électrique	p.u.
t_{cr}	Temps d'élimination du défaut	s
ε	Tolérance de convergence	–

Types de nœuds. PQ (code 0) : puissances active et réactive imposées. PV (code 2) : puissance active et module de tension imposés. Bilan (code 1, aussi appelé nœud de référence ou *slack*) : module et argument de tension imposés.

1 Introduction

1.1 Objet du travail

L'analyse d'un réseau électrique repose sur un petit nombre d'outils de calcul qui se retrouvent dans tous les logiciels du domaine : la description du réseau par une matrice d'admittance nodale, sa réciproque sous forme de matrice d'impédance, la résolution du régime permanent par un calcul d'écoulement de puissance, et l'étude du comportement dynamique après un défaut. Ce travail pratique consiste à implémenter ces outils, à les valider et à comparer les méthodes numériques qui permettent de les mettre en œuvre.

Le programme réalisé propose une interface interactive permettant de calculer les matrices $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ et $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$, d'effectuer l'écoulement de puissance par trois méthodes numériques et de lancer une analyse de stabilité transitoire. Chaque fonctionnalité s'applique à l'un des quatorze systèmes de test intégrés, de 3 à 118 nœuds, et restitue ses résultats sous forme de tableaux et de graphiques.

1.2 Démarche de validation

Un programme de calcul de réseau produit des nombres qu'il est difficile de vérifier à la main dès que le réseau dépasse quelques nœuds. La démarche adoptée ici repose donc sur trois niveaux de validation indépendants, et c'est ce qui justifie d'avoir implémenté plusieurs méthodes plutôt qu'une seule.

1. **Validation croisée interne.** La $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ est construite par une méthode directe, sans jamais inverser $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$. La comparer à $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}$ vérifie simultanément les deux constructions : elles ne partagent aucun code et ne peuvent pas être fausses de la même façon.
2. **Validation croisée entre méthodes.** Les trois méthodes d'écoulement de puissance résolvent le même système d'équations par des chemins numériques entièrement différents. Leur accord sur les tensions est une preuve forte que la solution obtenue est bien la solution des équations, indépendamment de l'algorithme.
3. **Validation externe.** Les réseaux IEEE 14, 30, 57 et 118 possèdent des solutions publiées de référence. La comparaison des pertes et du profil de tension à ces valeurs vérifie le programme dans son ensemble, entrée des données comprise.

1.3 Organisation du rapport

La section 2 décrit l'architecture du programme et le modèle de données. La section 3 traite de la construction des matrices $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ et $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$. La section 4 présente les trois méthodes d'écoulement de puissance et la section 5 le modèle de stabilité transitoire. La section 6 rassemble et discute l'ensemble des résultats obtenus sur les quatorze systèmes de test, et la section 7 conclut en revenant sur les limites des modèles retenus.

2 Architecture du programme et modèle de données

2.1 Structure générale

Le fichier `Main.m` constitue le point d'entrée : il appelle `programme.m`, qui construit l'interface App Designer représentée sur la figure 1. Trois outils y sont proposés : *Ybus & Zbus*, *Écoulement de puissance* et *Stabilité transitoire*.

L'interface pilote les scripts de calcul dans l'espace de travail de base au moyen de `evalin` et

Paramètres Systeme

	From	To	R	X	B
1	1.0000	2.0000	0.0200	0.0400	
2	1.0000	3.0000	0.0100	0.0300	
3	2.0000	3.0000	0.0125	0.0250	

Matrices

Ybus

	1	2	3
1	20.0000 -50.0000i	-10.0000 +20.0000i	-10.0000 +30.0000i
2	-10.0000 +20.0000i	26.0000 -52.0000i	-16.0000 +32.0000i
3	-10.0000 +30.0000i	-16.0000 +32.0000i	26.0000 -62.0000i

Zbus

	1	2	3
1	0.0031 + 0.0077i	-0.0020 - 0.0043i	-0.0011 - 0.0034i
2	-0.0020 - 0.0043i	0.0035 + 0.0070i	-0.0014 - 0.0027i
3	-0.0011 - 0.0034i	-0.0014 - 0.0027i	0.0025 + 0.0061i

Fig. 1. Interface graphique de la boîte à outils, développée sous App Designer.

assignin : les données (linedata, busdata, Ybus, résultats) y sont partagées entre scripts. Ce choix présente un avantage important pour la vérification : le cœur numérique reste indépendant de l'interface et peut être exécuté en ligne de commande. Les scripts `test_core.m` et `test_st.m` reproduisent ainsi l'intégralité des résultats de la section 6 sans passer par l'interface, ce qui rend les mesures reproductibles et permet de vérifier qu'aucun résultat ne dépend d'une manipulation particulière de l'utilisateur.

Chaque outil dispose de garde-fous propres. L'outil *Ybus & Zbus* affiche les matrices complexes formatées dans trois onglets (Y_{bus} , Z_{bus} directe et Y_{bus}^{-1}), avec l'indicateur $\max |Z_{bus} - Y_{bus}^{-1}|$ affiché en permanence. L'outil *Écoulement de puissance* impose un départ à plat déterministe, valide les entrées et affiche un état de convergence explicite plutôt que de retourner silencieusement un résultat non convergé. L'outil *Stabilité transitoire* intègre les paramètres du défaut (T_{max} , t_{cr} , f , Δt) ainsi que le choix du nœud en défaut et de la ligne à ouvrir directement dans son panneau.

2.2 Modèle de données

Les données de réseau suivent le format classique en deux tables.

La table `busdata` comporte onze colonnes :

$$[N^o, \text{Code}, |V|, \theta, P_{ch}, Q_{ch}, P_g, Q_g, Q_{min}, Q_{max}, Q_c]$$

où le **code** vaut 0 pour un nœud PQ, 2 pour un nœud PV et 1 pour le nœud bilan.

La table `linedata` comporte six colonnes :

$$[n_l, n_r, R, X, B/2, \text{prise}]$$

La colonne 5 contient la *demi-susceptance* de charge de la ligne, et la colonne 6 le rapport de transformation, placé au nœud de départ n_l .

Un point de conception mérite d'être signalé : le nœud bilan n'est pas toujours le nœud 1. Il s'agit du nœud 9 pour le réseau à 47 nœuds, du nœud 65 pour celui à 68 nœuds et du nœud 69 pour le réseau IEEE 118. Les solveurs identifient donc les nœuds par leur code et non par

leur position, ce qui rend l'implémentation indifférente à cet ordre. Cette précaution évite une classe entière d'erreurs silencieuses, dans lesquelles un programme fonctionne parfaitement sur les petits réseaux d'essai et donne des résultats faux sur les grands.

3 Construction des matrices Y_{bus} et Z_{bus}

3.1 Matrice d'admittance nodale

La matrice d'admittance nodale traduit les lois de Kirchhoff sous forme matricielle : $\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{bus} \mathbf{V}$. Sa construction est purement additive, chaque branche apportant sa contribution aux termes diagonaux et extra-diagonaux correspondants.

Pour une branche d'admittance série $y = 1/(R + jX)$, de shunt de charge jB à chaque extrémité et de prise a placée au nœud de départ, la contribution s'écrit :

$$Y_{ii} += \frac{y}{a^2} + jB, \quad Y_{jj} += y + jB, \quad (1)$$

$$Y_{ij} += -\frac{y}{a}, \quad Y_{ji} += -\frac{y}{a}. \quad (2)$$

Le point essentiel est que les contributions sont **accumulées** et non affectées. Cela traite correctement les lignes parallèles, présentes dans le réseau IEEE 118, où deux branches distinctes relient la même paire de nœuds : une implémentation par affectation écraserait la première contribution par la seconde et sous-estimerait l'admittance de la liaison.

```

1 for k = 1:nbr
2     i = linedata(k,1); j = linedata(k,2);
3     a = linedata(k,6); if a == 0, a = 1; end % pas de prise -> a = 1
4     y = 1/(linedata(k,3) + 1j*linedata(k,4)); % admittance serie
5     ysh = 1j*linedata(k,5); % shunt = j*B (col. 5 = B/2)
6
7     Ybus(i,i) = Ybus(i,i) + y/(a*a) + ysh;
8     Ybus(j,j) = Ybus(j,j) + y + ysh;
9     Ybus(i,j) = Ybus(i,j) - y/a;
10    Ybus(j,i) = Ybus(j,i) - y/a;
11 end

```

Listing 1. Constructeur de Y_{bus} (extrait de `Y_bus.m`). Les contributions sont accumulées, ce qui traite les lignes parallèles et les prises de transformateur.

3.2 Matrice d'impédance nodale par méthode directe

Le script `z_bus.m` construit Z_{bus} par **addition successive de branches**, sans jamais inverser Y_{bus} . On part d'un réseau réduit à la seule référence, puis on ajoute les branches une à une en mettant à jour la matrice. Trois opérations élémentaires interviennent, selon la nature de la branche ajoutée.

Type 1 – nouveau nœud relié à la référence. La branche relie un nœud nouveau à la terre au travers d'un shunt. La matrice est bordée d'une ligne et d'une colonne nulles, avec l'impédance de la branche en position diagonale.

Type 2 – nouveau nœud relié à un nœud existant. La branche relie un nouveau nœud p à un nœud existant r . La nouvelle ligne et la nouvelle colonne recopient celles de r , et le terme diagonal vaut $Z_{rr} + z_{pr}$.

Type 3 – fermeture de boucle entre deux nœuds existants. La branche relie deux nœuds existants a et b . La matrice est d'abord bordée comme au type 2, puis le nœud fictif ajouté est éliminé par réduction de Kron :

$$\mathbf{Z}_{\text{bus}} \leftarrow \mathbf{Z}_{\text{bus}} - \frac{(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b)(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b)^T}{Z_{aa} + Z_{bb} - 2Z_{ab} + z_b}, \quad (3)$$

où $\mathbf{z}_a$ désigne la colonne a de $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$.

Les shunts de charge des lignes fournissent l'ancrage à la terre nécessaire au type 1. Les **transformateurs à prise sont préalablement repliés dans leur modèle en π équivalent** : impédance série $z \cdot a$, soit une admittance y/a , avec une jambe à la terre $y(1-a)/a^2$ du côté de la prise et $y(a-1)/a$ du côté opposé, ces jambes étant agrégées aux shunts de ligne de chaque nœud. La construction directe devient ainsi applicable à *tout* réseau possédant au moins un élément shunt, transformateurs et lignes parallèles compris.

Il existe cependant une limite physique, et non numérique, à cette construction. En l'absence totale de shunt, cas du réseau à 3 nœuds de la collection, la matrice $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ est singulière : la somme de chaque ligne est nulle, puisque aucun courant ne peut retourner par la terre. Une $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ référencée à la terre n'existe alors pas, et l'outil se replie proprement sur la pseudo-inverse pinv en le signalant à l'utilisateur plutôt qu'en retournant une matrice dépourvue de sens.

4 Méthodes d'écoulement de puissance

4.1 Le problème à résoudre

Les trois méthodes résolvent le même système d'équations de bilan de puissance, qui s'écrit pour chaque nœud

$$S_i = P_i + jQ_i = V_i \overline{\left(\sum_{j=1}^N Y_{ij} V_j \right)}. \quad (4)$$

Ce système est non linéaire : les inconnues, tensions complexes, apparaissent en produit avec leurs conjuguées. Les inconnues effectives sont les angles θ_i de tous les nœuds sauf le bilan, et les modules $|V_i|$ des seuls nœuds PQ.

Les trois méthodes diffèrent par la manière dont elles linéarisent ou contournent cette non-linéarité, et c'est cette différence qui explique leurs comportements respectifs de convergence.

4.2 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel réécrit (4) sous forme de point fixe et met à jour successivement les tensions, en utilisant immédiatement les valeurs déjà actualisées :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{\overline{S_i}}{\overline{V_i}} - \sum_{j \neq i} Y_{ij} V_j \right), \quad V_i \leftarrow V_i + \alpha (V_i^{(k+1)} - V_i), \quad (5)$$

où α est un facteur d'accélération.

La méthode est simple à programmer et sa convergence est linéaire : l'erreur est réduite d'un facteur à peu près constant à chaque itération. Le nombre d'itérations croît donc avec la taille et le conditionnement du réseau, alors que le coût d'une itération reste très faible.

Le traitement des nœuds PV demande une attention particulière. La puissance réactive

nécessaire au maintien de $|V_i| = V_i^{spec}$ est évaluée à la consigne, selon le schéma de Stagg, puis bornée par $[Q_{min}, Q_{max}]$. Lorsque la limite est atteinte, le nœud est reclassé en PQ à la valeur limite et l'accélération est désactivée pour ce nœud, faute de quoi le dépassement répété de la limite produit une oscillation entretenue. Le test de convergence porte sur le phaseur complet, $\max_i |V_i^{(k+1)} - V_i^{(k)}| < \varepsilon$, et non sur le seul module.

4.3 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson linéarise (4) autour du point courant et résout à chaque itération le système

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{F}, \quad (6)$$

où $\Delta \mathbf{F} = [\Delta P; \Delta Q; \Delta |V|^2]$ rassemble les résidus.

L'implémentation retenue utilise les **coordonnées rectangulaires** $V_i = e_i + jf_i$, le jacobien complet comportant alors six blocs : $\partial P / \partial e$, $\partial P / \partial f$, $\partial Q / \partial e$, $\partial Q / \partial f$, $\partial |V|^2 / \partial e$ et $\partial |V|^2 / \partial f$. Ce choix évite les fonctions trigonométriques et rend les dérivées polynomiales, donc exactes et rapides à évaluer, au prix d'une équation supplémentaire par nœud PV pour imposer le module de tension.

La convergence est quadratique : le nombre de chiffres exacts double à chaque itération, ce qui explique les 3 à 5 itérations observées quelle que soit la taille du réseau. Chaque itération est en revanche coûteuse, l'assemblage et la résolution du jacobien dominant le temps de calcul.

Pour le découpage du jacobien, les nœuds sont réordonnés selon la séquence [bilan; PV; PQ], puis les résultats sont réécrits dans l'ordre d'origine avant affichage. Les limites réactives des nœuds PV sont appliquées par une boucle externe : un nœud saturé est basculé en PQ à sa valeur limite et l'écoulement est relancé.

4.4 Méthode découplée rapide

La méthode découplée rapide (*Fast Decoupled Load Flow*, FDLF) exploite deux propriétés des réseaux de transport : la forte prédominance de la réactance sur la résistance, et la faiblesse des écarts angulaires entre nœuds voisins. Il en résulte un découplage entre le couple $P-\theta$ et le couple $Q-V$:

$$\Delta \theta = [\mathbf{B}']^{-1} (\Delta P / V), \quad \Delta V = [\mathbf{B}'']^{-1} (\Delta Q / V). \quad (7)$$

La matrice $\mathbf{B}'$ est bâtie à partir des *seules réactances* de ligne (schéma dit BX), et $\mathbf{B}'' = -\text{Im}(\mathbf{Y}_{bus})$ restreinte aux nœuds PQ. Ces deux matrices sont **constantes** : elles sont factorisées une seule fois avant la boucle itérative. Le coût par itération devient donc une simple résolution triangulaire, très inférieur à celui d'une itération de Newton-Raphson, au prix d'un nombre d'itérations plus élevé puisque la convergence n'est plus quadratique.

Cette méthode possède une limite qu'il faut connaître : les hypothèses de découplage se dégradent lorsque le rapport R/X devient élevé, ce qui est le cas des réseaux de distribution. Dans l'implémentation présente, les limites réactives des nœuds PV ne sont pas appliquées par le FDLF, ce qui explique de légers écarts sur les nœuds saturés par rapport aux deux autres méthodes.

5 Analyse de stabilité transitoire

5.1 Modèle classique

Le script `st.m` met en œuvre le *modèle classique* de stabilité transitoire. Chaque machine y est représentée par une force électromotrice E' de module constant derrière son impédance transitoire $R_a + jX'_d$, et les charges sont converties en admittances constantes puis intégrées à la matrice $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$.

L'état pré-défaut est obtenu par un écoulement de puissance convergé, dont les tensions complexes servent à initialiser les forces électromotrices et les angles rotoriques. Cette initialisation est essentielle : des angles initiaux erronés produisent une oscillation parasite dès le premier pas, indépendante du défaut étudié, qui rend le résultat ininterprétable.

5.2 Séquence du défaut

La séquence simulée comporte trois configurations de réseau successives.

1. **Avant défaut.** Le réseau nominal, dont l'écoulement de puissance fournit le point de fonctionnement initial.
2. **Pendant le défaut.** Un court-circuit franc au nœud choisi est modélisé en forçant sa tension à zéro, ce qui définit le réseau $\mathbf{Y}_1$. La puissance électrique transmissible s'effondre, tandis que la puissance mécanique reste constante : les machines accélèrent.
3. **Après élimination.** Au bout du temps d'élimination t_{cr} , la ligne défaillante est ouverte, ce qui définit le réseau $\mathbf{Y}_2$. La topologie modifiée transmet moins de puissance que le réseau nominal, d'où un nouveau point d'équilibre.

5.3 Équation du mouvement et intégration

L'équation du mouvement de chaque machine s'écrit

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi f}{H} (P_m - P_e), \quad \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_n. \quad (8)$$

Elle est intégrée par la méthode d'Euler explicite. À chaque pas, les tensions du réseau sont résolues par balayage de Gauss avec les forces électromotrices internes figées, ce qui fournit les puissances électriques P_e injectées par chaque machine.

Le choix de la méthode d'Euler appelle une remarque. Elle est peu précise et introduit un amortissement numérique dépendant du pas Δt , ce qui la rend inadaptée à l'étude d'oscillations sur plusieurs secondes. Elle reste en revanche acceptable pour l'objet visé ici, qui est de déterminer si le système survit à sa *première* oscillation, laquelle se joue sur quelques centaines de millisecondes. C'est la même restriction que celle du critère des aires égales, auquel les résultats de la section 6.4 sont d'ailleurs comparés.

6 Résultats et discussion

Tous les résultats de cette section ont été obtenus sous MATLAB R2024b en exécution automatisée, au moyen des scripts `test_core.m`, `test_st.m` et `report/make_results.m`, sur les quatorze systèmes de test.

6.1 Concordance de la $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ directe avec $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}$

Le tableau 2 donne l'écart $\max |\mathbf{Z}_{\text{bus}}^{\text{direct}} - \mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}|$ pour chaque système, et la partie basse de la figure 2 le représente en échelle logarithmique.

Tab. 2. Écart entre la $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ construite par addition de branches et $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}$.

Système	N	Transfo.	Écart $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$	Système	N	Transfo.	Écart $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$
3	3	non	singulier ¹	14	14	oui	$1,1 \times 10^{-13}$
5	5	non	$8,8 \times 10^{-14}$	26	26	oui	$4,4 \times 10^{-14}$
5cours	5	non	$8,8 \times 10^{-14}$	30	30	oui	$1,7 \times 10^{-13}$
6	6	non	$1,0 \times 10^{-12}$	47	47	non	$2,4 \times 10^{-14}$
9	9	oui	$2,5 \times 10^{-15}$	57	57	oui	$7,9 \times 10^{-14}$
10	10	oui	$4,6 \times 10^{-14}$	68	68	oui	$7,4 \times 10^{-16}$
11	11	non	$3,8 \times 10^{-12}$	118	118	non ²	$7,4 \times 10^{-15}$

¹ aucun élément shunt : $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ est singulière et une $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ référencée à la terre n'existe pas ; repli signalé sur p.inv. ² réseau comportant des lignes parallèles.

Discussion. L'écart est partout compris entre 10^{-12} et 10^{-16} , c'est-à-dire au niveau de l'arrondi machine en double précision. La construction incrémentale, appliquée à quatorze systèmes comptant jusqu'à 186 branches, et l'inversion directe produisent donc *la même matrice*. Ce résultat valide simultanément les deux chaînes de calcul : le constructeur $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ du listing 1, avec son accumulation, ses prises et ses lignes parallèles, et l'algorithme d'addition de branches de la section 3.2 avec le repliement des transformateurs en modèle π . L'intérêt de ce test tient à ce que les deux chemins ne partagent aucune ligne de code : une erreur commune aux deux est très improbable.

Le cas du réseau à 3 nœuds illustre la limite physique déjà annoncée. Sans aucun élément shunt, la somme de chaque ligne de $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ est nulle, la matrice est singulière, et l'impédance « vue de la terre » n'est tout simplement pas définie. Que l'outil le détecte et le signale, plutôt que de renvoyer le résultat d'une inversion numériquement instable, fait partie du résultat.

6.2 Écoulement de puissance : convergence et coût

Le tableau 3 compare les trois méthodes en nombre d'itérations, en temps de calcul et en pertes actives.

Discussion. Les comportements théoriques des trois méthodes sont retrouvés quantitativement.

- *Newton-Raphson* converge en 3 à 5 itérations quelle que soit la taille du réseau, ce qui est la signature de la convergence quadratique. Le nombre d'itérations est même remarquablement insensible à la taille : 4 itérations pour le réseau à 3 nœuds comme pour le réseau à 118 nœuds. Chaque itération est en revanche coûteuse, du fait de l'assemblage du jacobien complet.
- *Le découplé rapide* demande 5 à 16 itérations, chacune très bon marché puisque les deux matrices constantes ne sont factorisées qu'une seule fois. Sur les grands réseaux, son temps total devient compétitif avec Newton-Raphson : 12 ms contre 20 ms sur le réseau à 118 nœuds. C'est exactement le compromis pour lequel la méthode a été conçue.
- *Gauss-Seidel* montre une convergence linéaire dont le nombre d'itérations croît avec la taille et le conditionnement, de 7 à 51 itérations, chaque itération restant extrêmement simple. Le cas du réseau à 47 nœuds, qui converge en 7 itérations seulement, rappelle que c'est le conditionnement et non la taille seule qui gouverne cette méthode.

Tab. 3. Convergence et coût des trois méthodes d'écoulement de puissance. La tolérance ε et le nombre maximal d'itérations sont propres à chaque système ; les temps sont indicatifs, mesurés sur une machine de bureau.

Système	Gauss-Seidel		Newton-Raphson		FDLF		P_{pertes} (MW)	pertes (%)
	it.	t (ms)	it.	t (ms)	it.	t (ms)		
3	19	40	4	53	14	22	18,42	4,40
5	22	20	4	37	9	36	3,05	1,99
5cours	14	19	3	54	8	34	4,57	2,69
6	20	12	4	31	6	19	5,29	1,49
9	36	26	4	24	6	23	3,94	1,24
10	19	22	3	31	9	21	3,62	3,79
11	17	16	3	11	7	14	6,65	1,10
14	24	13	4	12	10	36	13,39	4,92
26	22	13	3	30	6	20	15,54	1,22
30	26	13	4	12	8	10	17,60	5,85
47	7	18	3	11	5	10	12,86	1,42
57	48	13	4	13	13	15	28,54	2,23
68	51	11	5	22	16	15	68,22	27,23 ¹
118	22	8	4	20	6	12	131,96	3,02

¹ Le réseau à 68 nœuds (agrégat NETS–NYPS) est fortement chargé ; le pourcentage est rapporté à la génération totale.

Les trois méthodes s'accordent à mieux que 2×10^{-4} p.u. en module de tension sur l'ensemble des systèmes, ce qui constitue leur validation croisée. Enfin, les pertes calculées sur le réseau IEEE 118, soit 131,96 MW, correspondent à la valeur de référence de la littérature, voisine de 132 MW.

6.3 Solution détaillée : réseau IEEE 14 nœuds

Le tableau 4 donne la solution complète du réseau IEEE 14 obtenue par Newton-Raphson en 4 itérations, avec des pertes de 13,39 MW.

Discussion. Le profil de tension reste dans la plage $[1,010 ; 1,090]$ p.u., soit à l'intérieur des limites d'exploitation usuelles de ± 5 à ± 10 %. Le minimum se situe au nœud 3, qui est un nœud PV maintenu à sa consigne de 1,010 p.u. Le point électriquement le plus faible du réseau est en revanche le nœud 14, le plus éloigné des sources, avec $|V| = 1,0343$ p.u. et $\theta = -16,04^\circ$: c'est là que se cumulent les chutes de tension et les déphasages le long du chemin depuis le nœud bilan.

Le nœud bilan fournit 232,39 MW pour une charge totale de 259 MW, les 40 MW restants provenant du nœud 2. Les pertes actives valent 13,39 MW, soit 4,92 % de la génération, valeur cohérente pour un réseau de test de cette taille dont les lignes sont représentées avec leur résistance réelle.

Ces valeurs coïncident avec la solution de référence publiée du cas IEEE 14, ce qui valide l'implémentation sur un réseau comportant simultanément des transformateurs à prise et des nœuds PV susceptibles de saturer en réactif.

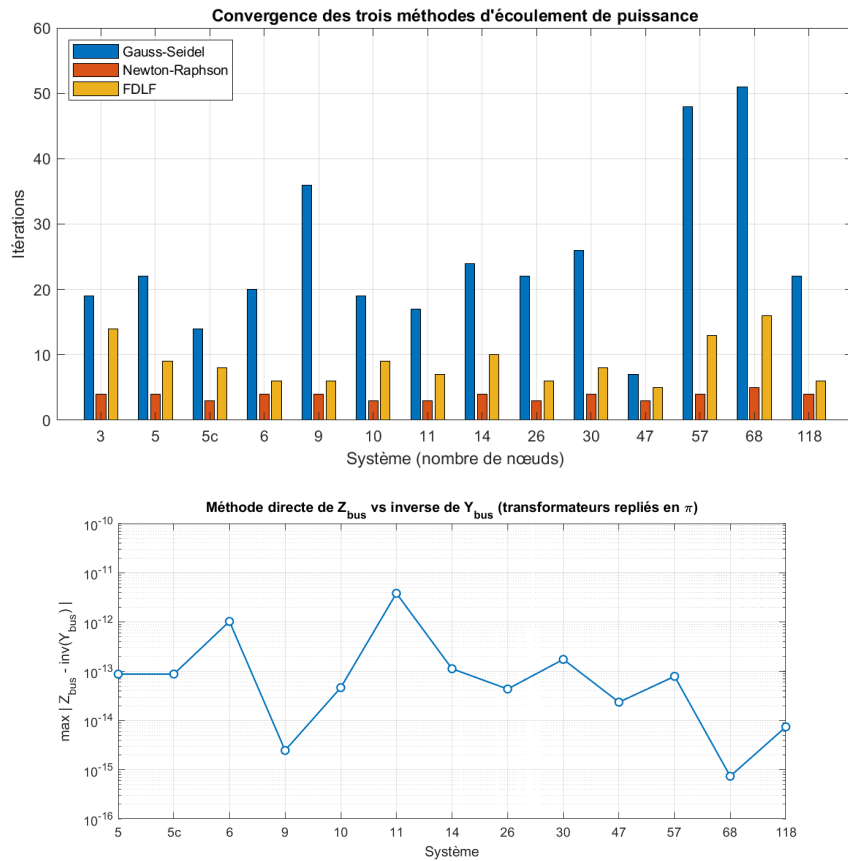


Fig. 2. En haut : nombre d'itérations des trois méthodes sur les quatorze systèmes. En bas : écart $\max |Z_{bus} - Y_{bus}^{-1}|$ en échelle logarithmique pour tous les réseaux possédant un ancrage à la terre, tous très en dessous du seuil numérique de 10^{-10} .

Tab. 4. Réseau IEEE 14 nœuds : solution de l'écoulement de puissance obtenue par Newton-Raphson.

Nœud	Type	$ V $ (p.u.)	θ (°)	P_{ch} (MW)	Q_{ch} (MVar)	P_g (MW)	Q_g (MVar)
1	bilan	1,0600	0,000	0,0	0,0	232,39	-16,78
2	PV	1,0450	-4,981	21,7	12,7	40,00	42,74
3	PV	1,0100	-12,719	94,2	19,0	0	23,60
4	PQ	1,0183	-10,318	47,8	-3,9	0	0
5	PQ	1,0200	-8,781	7,6	1,6	0	0
6	PV	1,0700	-14,242	11,2	7,5	0	13,14
7	PQ	1,0608	-13,357	0	0	0	0
8	PV	1,0900	-13,357	0	0	0	18,06
9	PQ	1,0541	-14,935	29,5	16,6	0	0
10	PQ	1,0495	-15,098	9,0	5,8	0	0
11	PQ	1,0561	-14,800	3,5	1,8	0	0
12	PQ	1,0550	-15,096	6,1	1,6	0	0
13	PQ	1,0501	-15,174	13,5	5,8	0	0
14	PQ	1,0343	-16,041	14,9	5,0	0	0

6.4 Stabilité transitoire et temps critique d'élimination

La figure 3 montre la réponse du réseau à 6 nœuds, comportant trois machines, pour un défaut franc au nœud 6 éliminé à $t_{cr} = 0,2$ s par ouverture de la ligne 4–6. Les angles rotoriques relatifs oscillent puis restent bornés : le système est stable. Les angles rotoriques initiaux, $8,97^\circ$, $12,03^\circ$ et $13,19^\circ$, proviennent du régime pré-défaut convergé.

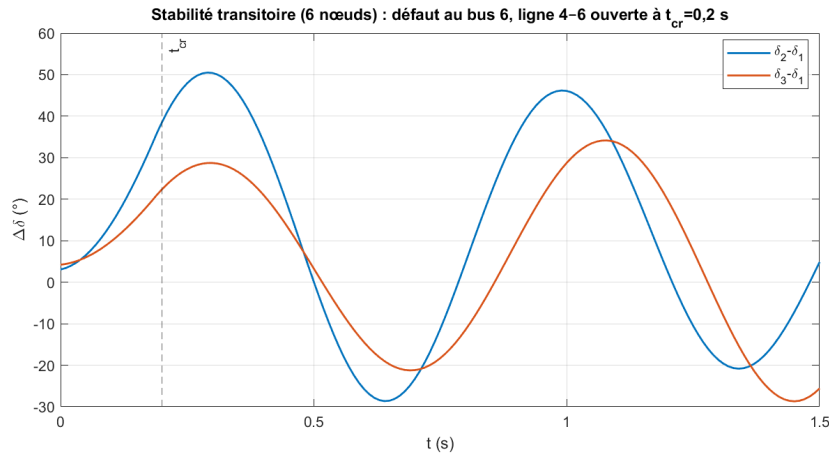


Fig. 3. Stabilité transitoire du réseau à 6 nœuds : angles rotoriques relatifs $\delta_i - \delta_1$ après un défaut au nœud 6 éliminé à $t_{cr} = 0,2$ s par ouverture de la ligne 4–6.

L'intérêt pratique de l'outil réside dans l'étude paramétrique du *temps critique d'élimination*. Le même défaut est simulé pour des valeurs croissantes de t_{cr} (tableau 5 et figure 4).

Tab. 5. Réseau à 6 nœuds, défaut au nœud 6 : influence du temps d'élimination sur l'excursion angulaire maximale.

t_{cr} (s)	Écart angulaire max. ($^\circ$)	Verdict
0,10	28,0	stable
0,20	50,5	stable
0,30	79,7	stable
0,35	95,8	stable
0,40	113,0	stable
0,45	134,8	stable, proche de la limite
0,50	322,7	instable , perte de synchronisme

Discussion. L'excursion angulaire de la première oscillation croît de façon monotone avec t_{cr} , de 28° pour 0,10 s à 135° pour 0,45 s. L'interprétation physique est directe : pendant le défaut, la puissance électrique transmissible s'effondre tandis que la puissance mécanique reste constante, donc les machines accélèrent et accumulent de l'énergie cinétique proportionnellement à la durée du défaut. Après élimination, cette énergie doit être restituée au réseau ; si elle excède ce que la caractéristique puissance-angle du réseau post-défaut peut absorber, l'angle continue de croître et le synchronisme est perdu. C'est exactement l'énoncé du critère des aires égales.

Entre $t_{cr} = 0,45$ s et $t_{cr} = 0,50$ s, le système bascule de la stabilité à la perte de synchronisme, l'écart angulaire dépassant 180° de façon divergente. Le **temps critique d'élimination** du

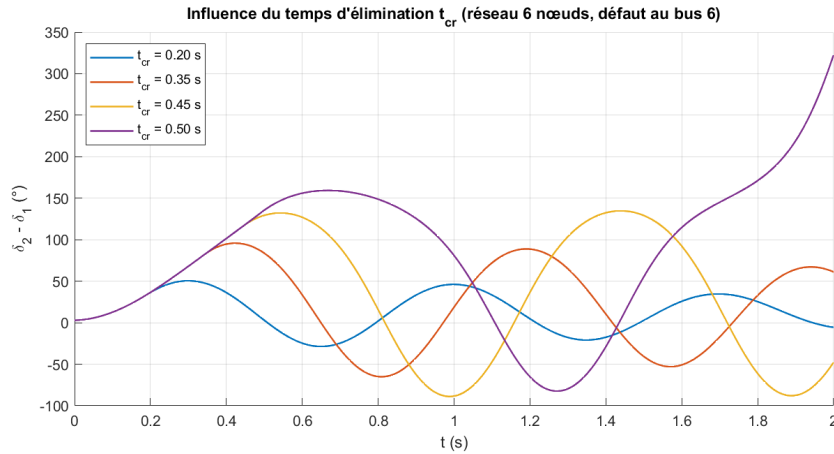


Fig. 4. Angle relatif $\delta_2 - \delta_1$ pour différents temps d'élimination. Plus le défaut persiste, plus l'excursion angulaire de la première oscillation croît, jusqu'à la perte de synchronisme entre 0,45 et 0,50 s.

défaut est donc compris entre 0,45 et 0,50 s pour cette configuration. Le saut brutal de la valeur mesurée, de 135° à 323° pour une variation de 50 ms seulement, est caractéristique : la perte de synchronisme n'est pas une dégradation progressive mais un basculement.

Ce type d'étude, immédiat avec l'outil, est précisément celui qui dimensionne les réglages de protection d'un réseau réel : le temps d'élimination effectif des protections doit rester inférieur au temps critique, avec une marge suffisante pour couvrir les incertitudes de modèle et les cas de défaut plus sévères.

7 Conclusion

La boîte à outils développée couvre l'essentiel de l'analyse des réseaux électriques : construction des matrices $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ et $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$, écoulement de puissance par trois méthodes et stabilité transitoire, le tout piloté par une interface graphique et doublé de scripts d'exécution automatisée qui rendent les résultats reproductibles.

Les résultats obtenus sur quatorze systèmes de 3 à 118 nœuds établissent trois points. La $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ construite par addition de branches coïncide avec $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{-1}$ à la précision machine, transformateurs à prise et lignes parallèles compris, ce qui valide les deux constructions l'une par l'autre. Les trois méthodes d'écoulement de puissance s'accordent entre elles et avec les solutions de référence des réseaux IEEE. L'outil permet enfin de mener des études paramétriques de stabilité transitoire, le temps critique d'élimination du défaut étant situé entre 0,45 et 0,50 s sur le réseau à 6 nœuds étudié.

Sur le plan méthodologique, les comportements théoriques attendus des trois méthodes numériques sont retrouvés quantitativement : convergence quadratique de Newton-Raphson, itérations bon marché mais plus nombreuses du découplé rapide, convergence linéaire de Gauss-Seidel sensible au conditionnement. Le fait de les avoir implémentées toutes les trois, plutôt qu'une seule, a une double valeur : pédagogique, en rendant visibles des propriétés de convergence qui restent abstraites tant qu'on ne les mesure pas, et pratique, puisque leur accord constitue le principal moyen de vérification dont on dispose en l'absence de solution analytique.

Les limites de l'outil sont celles des modèles retenus, et il convient de les énoncer clairement. Une $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ référencée à la terre n'existe pas pour un réseau dépourvu de tout élément shunt, ce

que l'outil détecte et signale plutôt que de le masquer. Les limites réactives des nœuds PV ne sont pas appliquées par le découplé rapide, ce qui explique de légers écarts sur les nœuds saturés. Le modèle de stabilité est le modèle «classique», à force électromotrice constante et intégration d'Euler, ce qui le restreint à l'étude de la première oscillation : ni la régulation de tension, ni la régulation de vitesse, ni l'amortissement des machines n'y figurent, et une étude d'oscillations sur plusieurs secondes exigerait un modèle de machine d'ordre supérieur et un intégrateur d'ordre plus élevé. Ces restrictions étant admises, l'ensemble constitue une base solide pour l'apprentissage et l'expérimentation en analyse des systèmes électriques.

Références

- [1] G. W. Stagg et A. H. El-Abiad, *Computer Methods in Power System Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1968.
- [2] H. Saadat, *Power System Analysis*, 3^e éd. PSA Publishing, 2010.
- [3] P. Kundur, *Power System Stability and Control*. New York, McGraw-Hill, 1994.
- [4] B. Stott et O. Alsac, «Fast decoupled load flow», *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-93, n° 3, p. 859–869, 1974.
- [5] W. F. Tinney et C. E. Hart, «Power flow solution by Newton's method», *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-86, n° 11, p. 1449–1460, 1967.
- [6] J. J. Grainger et W. D. Stevenson, *Power System Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1994.
- [7] P. M. Anderson et A. A. Fouad, *Power System Control and Stability*, 2^e éd. Piscataway, IEEE Press, 2003.

A Systèmes de test intégrés

Tab. 6. Les quatorze systèmes de test disponibles dans la boîte à outils.

Système	N	Particularité	Nœud bilan
3	3	aucun shunt : Y_{bus} singulière	1
5	5	réseau élémentaire	1
5cours	5	variante du cours	1
6	6	3 machines, support de l'étude de stabilité	1
9	9	transformateurs à prise	1
10	10	transformateurs à prise	1
11	11	sans transformateur	1
14	14	IEEE 14, transformateurs et nœuds PV saturables	1
26	26	transformateurs	1
30	30	IEEE 30	1
47	47	bilan non situé au nœud 1	9
57	57	IEEE 57	1
68	68	agrégat NETS–NYPS, fortement chargé	65
118	118	IEEE 118, lignes parallèles	69

B Organisation des fichiers

Tab. 7. Organisation des scripts MATLAB.

Fichier	Rôle
Main.m	point d'entrée, lance l'interface
programme.m	construction de l'interface App Designer
Y_bus.m	constructeur de la matrice d'admittance nodale
Z_bus.m	construction directe de $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ par addition de branches
gauss_seidel.m	écoulement de puissance par Gauss-Seidel
newton_raphson.m	écoulement de puissance par Newton-Raphson
fdlf.m	écoulement de puissance découplé rapide
st.m	analyse de stabilité transitoire
system<N>bus.m	définition des quatorze systèmes de test
test_core.m, test_st.m	exécution automatisée de tous les cas
report/make_results.m, make_figs.m	génération des tableaux et figures