

Régulation en cascade vitesse-courant d'une machine à courant continu à excitation séparée

Entraînement à redresseur commandé : modélisation, synthèse analytique et simulation

Entraînements électriques et électronique de puissance

Un entraînement 220 V / 3000 tr/min : pont tout thyristors à six pulsations, modèle moyen du convertisseur et boucles PI/PID imbriquées

Auteur

Khalil Ellah LAGHA
M1 Électronique, Énergie électrique, Automatique
Université Grenoble Alpes

Outils

MATLAB / Simulink R2024a
Simscape Electrical
Python 3.12 (NumPy, SciPy)

Juillet 2026

Résumé

Ce rapport présente la conception complète et la simulation d'une régulation en cascade vitesse et courant pour une machine à courant continu à excitation séparée alimentée par un redresseur triphasé tout thyristors à six pulsations. Chaque élément de l'entraînement est développé en détail : le fonctionnement du pont commandé et la génération de son angle d'amorçage, le modèle moyen du convertisseur utilisé pour la synthèse, la fonction de transfert tension d'induit vers vitesse et sa réalisation sous forme de schéma-bloc, ainsi que le réglage analytique des régulateurs de courant et de vitesse par compensation pôle-zéro associée à un critère de temps de réponse.

Un élément clé de l'entraînement est le générateur d'angle d'amorçage, qui applique à la sortie du régulateur une loi en arc cosinus $\alpha = \arccos(2U_{cm}/U_h - 1)$. En reportant cette loi dans la caractéristique en cosinus du pont, la non-linéarité s'annule exactement et la tension moyenne de sortie devient proportionnelle au signal de commande. Le convertisseur peut alors être représenté par un gain statique de 22 V par unité de commande en série avec un retard de transport de 1,667 ms, moitié de l'intervalle de 3,33 ms séparant deux amorçages successifs. Sur ce procédé linéaire, le PID de courant et le PI de vitesse sont réglés sous forme close, avec des temps de réponse de 0,1 s et 1 s respectivement, rapport de dix délibéré qui justifie de synthétiser les deux boucles indépendamment.

La conception est vérifiée deux fois. Une implémentation Python indépendante reproduit chaque grandeur de synthèse à la précision affichée et sert à quantifier la dépendance de la réponse en boucle fermée vis-à-vis des objectifs de conception : le temps de réponse fixe le temps de montée de la boucle de courant du premier ordre, le coefficient d'amortissement fixe le dépassement de la boucle de vitesse du second ordre, et la pulsation propre fixe son temps d'établissement. Une hiérarchie de trois modèles Simulink, aboutissant à un modèle physique complet contenant le pont à thyristors réellement commuté, confirme ensuite que les régulateurs synthétisés sur le modèle moyen se comportent correctement en présence de l'ondulation à 300 Hz, du temps mort d'amorçage et du caractère discret de la conduction des thyristors.

Mots-clés : machine à courant continu, régulation en cascade, limitation de courant, redresseur à thyristors, angle d'amorçage, modèle moyen, compensation pôle-zéro, réglage de PID, Simscape Electrical.

Table des matières

Nomenclature	iv
1 Introduction et présentation du système	1
1.1 Pourquoi étudier encore un entraînement à courant continu	1
1.2 La machine à courant continu à excitation séparée	1
1.3 Architecture de régulation en cascade	2
2 Le redresseur commandé et son modèle	2
2.1 Le pont à six pulsations	2
2.2 Tension moyenne de sortie et non-linéarité associée	3
2.3 Le générateur d'angle d'amorçage : une loi linéarisante	3
2.4 Le modèle moyen, et pourquoi une fonction de transfert	4
3 Fonction de transfert du procédé et réalisation en schéma-bloc	5
3.1 Établissement	5
3.2 Le schéma-bloc de la machine	5
3.3 Fixation du point de fonctionnement	6
4 Synthèse des régulateurs	6
4.1 Boucle interne de courant	6
4.2 Boucle externe de vitesse	7
4.3 Unités, mise à l'échelle et limitation	7
4.4 Un réglage alternatif pour un couple de charge constant	8
5 Vérification Python et étude paramétrique	8
5.1 Recoupement des grandeurs de synthèse	8
5.2 Premier ordre : le temps de réponse fixe le temps de montée	8
5.3 Second ordre : l'amortissement fixe le dépassement	9
5.4 Second ordre : la pulsation propre fixe le temps d'établissement	11
6 Modèles Simulink et résultats	11
6.1 Schéma-bloc en fonctions de transfert	12
6.2 Modèle intermédiaire à machine physique	12
6.3 Modèle physique complet avec pont à thyristors commuté	13
7 Discussion et limites	14
8 Conclusion	14
A Récapitulatif des calculs de synthèse	15
B Organisation des modèles fournis	16

Table des figures

1	Le sous-système générateur d'angle d'amorçage. Il calcule $\alpha = \arccos(2U_{cm}/U_h - 1)$, loi en arc cosinus qui linéarise le pont à thyristors.	3
2	Le sous-système <i>Moteur DC</i> : l'admittance d'induit $1/((L_a+L_f)s+R_a)$ produit le courant, $k\Phi$ le convertit en couple, $1/(Js)$ intègre en vitesse, et $k\Phi \omega$ est réinjecté comme f.é.m. .	5
3	Réponses indicielles au point de fonctionnement nominal : boucle interne de courant (à gauche) et boucle externe de vitesse (à droite), montrant la séparation d'échelles de temps de dix pour un.	9
4	Boucle de courant du premier ordre : l'objectif de temps de réponse fixe le temps de montée, sans dépassement quel que soit le réglage.	9
5	Boucle de vitesse du second ordre : le coefficient d'amortissement fixe le dépassement et l'oscillation, à $\omega_n = 5$ rad/s constant.	10
6	Boucle de vitesse du second ordre : la pulsation propre fixe le temps d'établissement, à $\zeta = 0,7$ constant.	11
7	Schéma-bloc de la cascade en fonctions de transfert : le modèle de synthèse idéalisé, en correspondance directe avec les sections 2 à 4.	12
8	Modèle physique intermédiaire : le bloc Simscape <i>DC Machine</i> véritable, alimenté par une source de tension commandée moyennée.	12
9	Modèle physique complet : source triphasée, pont à thyristors à six pulsations, générateur d'angle d'amorçage et générateur d'impulsions synchronisé, inductance de lissage et machine à courant continu.	13

Liste des tableaux

2	Paramètres de la machine étudiée, confirmés par le bloc Simscape <i>DC Machine</i>	2
3	Gains des régulateurs obtenus analytiquement.	7
4	Grandeurs de synthèse : MATLAB et implémentation Python indépendante.	8
5	Boucle de courant du premier ordre : temps de montée en fonction du temps de réponse visé.	10
6	Boucle de vitesse du second ordre : dépassement en fonction de l'amortissement.	10
7	Boucle de vitesse du second ordre : temps d'établissement en fonction de la pulsation propre.	11
8	Chaîne de synthèse, dans l'ordre de calcul.	15
9	Organisation du code et des modèles accompagnant le rapport.	16

Nomenclature

u_a, i_a	Tension et courant d'induit	V, A
R_a, L_a	Résistance et inductance d'induit	Ω , H
L_f	Inductance de lissage en série	H
$k\Phi$	Constante de couple et de f.é.m.	V·s/rad
ω	Vitesse angulaire du rotor	rad/s
J	Inertie du rotor	kg·m ²
f_r	Coefficient de frottement visqueux	N·m·s
K_r	Coefficient de charge visqueuse	N·m·s
C_r	Couple de charge	N·m
α	Angle d'amorçage des thyristors	° ou rad
U_{LL}	Tension composée du réseau (eff.)	V
V_d, V_{d0}	Tension redressée moyenne, et sa valeur à $\alpha = 0$	V
U_{cm}	Sortie du régulateur de courant (signal de commande)	–
U_h	Amplitude de référence de la loi d'amorçage	–
K_c, T_c	Gain statique et retard du convertisseur	V/unité, s
b	Gain du procédé de la boucle de courant, K_c/R_a	A/unité
τ_e, τ_m	Constantes de temps électrique et mécanique	s
$t_{r,i}, t_{r,w}$	Temps de réponse visés, boucles de courant et de vitesse	s
K_p, K_i, K_d	Gains des régulateurs	–
ζ, ω_n	Coefficient d'amortissement et pulsation propre	–, rad/s

1 Introduction et présentation du système

1.1 Pourquoi étudier encore un entraînement à courant continu

Les entraînements à courant continu à vitesse variable ont largement cédé la place aux entraînements alternatifs dans les installations neuves, mais ils restent très présents dans le parc industriel existant et conservent une grande valeur pédagogique. La raison en est structurelle : dans une machine à courant continu à excitation séparée et à flux constant, le flux et le courant d'induit circulent dans deux circuits physiquement distincts, si bien que le couple est proportionnel au courant d'induit, sans couplage à compenser ni transformation de repère à effectuer. La machine est linéaire, et chaque étape de la synthèse peut être menée analytiquement puis vérifiée à la main. Les notions qui en ressortent, boucles imbriquées, séparation des échelles de temps, limitation de courant, compensation pôle-zéro, modèle moyen d'un convertisseur, se transposent directement aux entraînements alternatifs, où elles sont plus difficiles à percevoir parce qu'elles y sont mêlées à l'appareillage de la commande vectorielle.

Cette étude prend un entraînement complet, du réseau à l'arbre, et en développe chaque partie : le redresseur commandé et son générateur d'angle d'amorçage, le modèle moyen du convertisseur, la fonction de transfert du procédé et les deux régulateurs imbriqués. Le point de fonctionnement étudié est une tension d'induit de 220 V produisant une vitesse de 3000 tr/min.

1.2 La machine à courant continu à excitation séparée

Le procédé est une machine à courant continu à excitation séparée dont la vitesse est réglée par sa tension d'induit u_a , l'excitation étant maintenue constante de sorte que le terme de flux $k\Phi$ soit une constante. Dans ces conditions, la machine est linéaire et se décrit par un bilan électrique sur le circuit d'induit et un bilan mécanique sur le rotor :

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + (L_a + L_f) \frac{di_a}{dt} + k\Phi \omega(t), \quad (1)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = k\Phi i_a(t) - (f_r + K_r) \omega(t), \quad (2)$$

où $k\Phi \omega$ est la force contre-électromotrice, $k\Phi i_a$ le couple électromagnétique, f_r le frottement mécanique et K_r un coefficient de charge visqueuse.

L'inductance L_f mérite un commentaire, car elle domine la dynamique électrique. Il ne s'agit pas d'un paramètre de la machine mais d'une inductance de lissage volontairement placée en série avec l'induit pour réduire l'ondulation de courant produite par le redresseur. Sa valeur de 276 mH représente plus de vingt-cinq fois l'inductance d'induit elle-même : la constante de temps électrique de l'entraînement est donc essentiellement fixée par un composant que le concepteur choisit, et non par la machine. C'est une caractéristique récurrente des entraînements à thyristors : le filtre fait partie du procédé.

En éliminant le courant entre les deux bilans, on obtient la fonction de transfert tension d'induit vers vitesse sur laquelle repose toute l'étude :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{k\Phi}{(R_a + (L_a + L_f)s)(Js + f_r + K_r) + k\Phi^2}. \quad (3)$$

Son établissement et sa réalisation en schéma-bloc sont donnés à la section 3.

Tab. 2. Paramètres de la machine étudiée, confirmés par le bloc Simscape *DC Machine*.

Symbole	Grandeur	Valeur	Unité
R_a	résistance d'induit	2,33	Ω
L_a	inductance d'induit	10,6	mH
L_f	inductance de lissage série	276	mH
$k\Phi$	constante de couple / f.é.m.	0,57	V·s/rad
J	inertie du rotor	$7,5 \times 10^{-3}$	kg·m ²
f_r	frottement visqueux	$1,75 \times 10^{-4}$	N·m·s
k	mise à l'échelle de la boucle de vitesse	$1,25 \times 10^{-2}$	–

1.3 Architecture de régulation en cascade

Le régulateur adopte la structure classique en cascade à deux boucles imbriquées. Une boucle interne de courant règle le courant d'induit i_a et est conçue rapide ; sa consigne est produite par une boucle externe de vitesse, conçue nettement plus lente. Un bloc de saturation placé sur la consigne de courant assure naturellement la limitation de courant lors des grands transitoires tels que le démarrage ou les échelons de charge, ce qui protège à la fois la machine et les thyristors.

La conception impose délibérément une séparation des échelles de temps : la boucle de courant est réglée pour répondre environ dix fois plus vite que la boucle de vitesse, avec des temps de réponse visés de 0,1 s et 1 s respectivement. Comme la boucle interne s'établit bien avant que la boucle externe ne réagisse, le régulateur de vitesse voit en pratique la boucle de courant comme un actionneur de couple idéal et instantané, et les deux boucles peuvent être synthétisées indépendamment. C'est l'hypothèse sur laquelle repose la section 4, et c'est la raison pour laquelle le rapport de dix est une contrainte de conception et non une commodité.

La chaîne complète de signaux s'écrit donc

$$\omega_{\text{ref}} \rightarrow \boxed{\text{PI vitesse}} \rightarrow i_{a,\text{ref}} \rightarrow \boxed{\text{PID courant}} \rightarrow U_{cm} \rightarrow \boxed{\text{Redresseur}} \rightarrow u_a \rightarrow \boxed{\text{Machine}} \rightarrow \omega, \quad (4)$$

avec i_a ramené au comparateur interne et ω au comparateur externe.

2 Le redresseur commandé et son modèle

L'induit est alimenté par un redresseur triphasé tout thyristors à six pulsations, c'est-à-dire un pont de Graetz entièrement commandé. Cette section explique le fonctionnement du pont, la génération de son angle d'amorçage, puis la condensation de l'ensemble du convertisseur en une unique fonction de transfert du premier ordre utilisée pour la synthèse.

2.1 Le pont à six pulsations

Le pont est un *Universal Bridge* Simscape configuré à trois bras et six thyristors, alimenté par une source triphasée de tension composée $U_{LL} = 220$ V efficaces à 50 Hz. Les six thyristors conduisent par paires, chacun pendant 120° , et il se produit six commutations par période du réseau. La tension redressée porte donc une ondulation à

$$f_{\text{ond}} = 6 \times 50 = 300 \text{ Hz}, \quad (5)$$

que l'inductance de lissage de 276 mH filtre en un courant d'induit quasi constant.

Contrairement à une diode, un thyristor ne conduit qu'après réception d'une impulsion de gâchette : la conduction peut donc être retardée d'un angle d'amorçage α réglable, mesuré depuis l'instant de commutation naturelle. Ce retard constitue le levier de commande de tout l'entraînement.

2.2 Tension moyenne de sortie et non-linéarité associée

En moyennant la forme d'onde à six pulsations sur un segment de 60° , on obtient le résultat classique pour la sortie moyenne d'un pont tout commandé :

$$V_d(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U_{LL} \cos \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V_\phi \cos \alpha \approx 1,35 U_{LL} \cos \alpha, \quad (6)$$

où $V_\phi = U_{LL}/\sqrt{3}$ est la tension simple efficace. Avec $U_{LL} = 220$ V, le maximum sans retard vaut

$$V_{d0} = 1,35 \times 220 \approx 297 \text{ V}, \quad V_d(\alpha) = 297 \cos \alpha. \quad (7)$$

L'équation (6) montre que le convertisseur est quatre quadrants en tension : $\alpha < 90^\circ$ donne $V_d > 0$ et le pont redresse, $\alpha > 90^\circ$ donne $V_d < 0$ et le pont onduleur autorise le freinage récupératif, et $\alpha = 90^\circ$ donne $V_d = 0$. Elle montre aussi la difficulté : V_d est un cosinus de la variable de commande, donc le gain du convertisseur $dV_d/d\alpha = -V_{d0} \sin \alpha$ varie de zéro à $\alpha = 0$ jusqu'à son maximum à $\alpha = 90^\circ$. Un régulateur réglé pour un point de fonctionnement serait dérégulé à un autre. C'est précisément ce que le générateur d'angle d'amorçage vient corriger.

2.3 Le générateur d'angle d'amorçage : une loi linéarisante

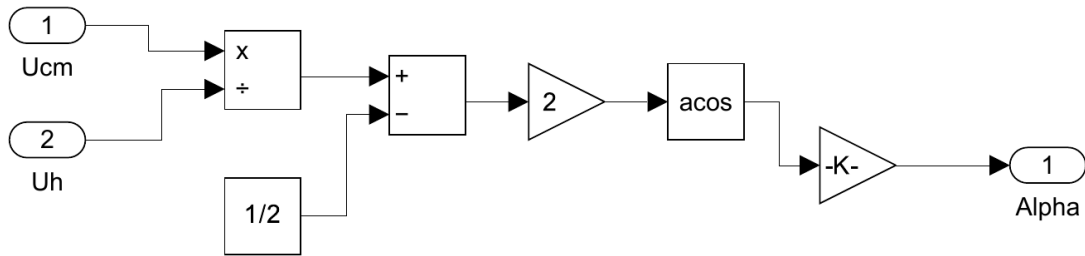


Fig. 1. Le sous-système générateur d'angle d'amorçage. Il calcule $\alpha = \arccos(2U_{cm}/U_h - 1)$, loi en arc cosinus qui linéarise le pont à thyristors.

Le générateur de la figure 1 convertit la sortie U_{cm} du régulateur de courant en un angle d'amorçage en degrés, fourni au générateur d'impulsions à six pulsations. En le lisant de gauche à droite, avec $U_h = 10$ comme amplitude de référence :

$$\frac{U_{cm}}{U_h} \xrightarrow{\times 2, -1} \left(\frac{2U_{cm}}{U_h} - 1 \right) \xrightarrow{\arccos} \alpha_{\text{rad}} \xrightarrow{\times 180/\pi} \alpha_{\text{deg}}, \quad (8)$$

soit

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{2U_{cm}}{U_h} - 1\right)}. \quad (9)$$

La raison d'être de l'arc cosinus est qu'il annule exactement le cosinus du pont. En

reportant (9) dans (6),

$$V_d = V_{d0} \cos \alpha = V_{d0} \left(\frac{2U_{cm}}{U_h} - 1 \right), \quad (10)$$

la tension moyenne de sortie devient une fonction affine du signal de commande. La correspondance est $U_{cm} = 0 \Rightarrow \alpha = 180^\circ \Rightarrow V_d = -V_{d0}$, $U_{cm} = 5 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow V_d = 0$ et $U_{cm} = 10 \Rightarrow \alpha = 0^\circ \Rightarrow V_d = +V_{d0}$. Toute la plage de tension quatre quadrants est ainsi disponible avec un gain de convertisseur unique et constant. Un générateur d'impulsions synchronisé à six pulsations et à largeur d'impulsion de 60° place ensuite les impulsions de gâchette à cet angle par rapport à la phase du réseau mesurée.

2.4 Le modèle moyen, et pourquoi une fonction de transfert

Pour la synthèse, le pont commuté n'est pas utilisable directement. Il est non linéaire avant linéarisation et discret dans le temps, puisqu'il ne peut agir qu'aux six instants d'amorçage par période, alors que le placement de pôles et le critère de temps de réponse exigent un procédé linéaire et continu. Le remède standard est le modèle moyen, qui remplace tout le convertisseur, pont, loi d'amorçage et générateur d'impulsions, par deux effets.

Un gain statique. Grâce à la loi en arc cosinus de la section 2.3, ce gain est constant. Dans le modèle en schéma-bloc idéalisé, la plage de commande $U_{cm} \in [0, 10]$ est mise à l'échelle de sorte que la commande maximale produise la tension d'induit nominale :

$$K_c = \frac{U_{a,nom}}{U_{cm,max}} = \frac{220}{10} = 22 \quad [\text{V par unité de commande}]. \quad (11)$$

Un petit retard de transport. Après que le régulateur a modifié U_{cm} , le nouvel angle d'amorçage ne peut prendre effet qu'au prochain amorçage. Les amorçages surviennent toutes les $1/(6 \times 50) = 3,33$ ms, et une modification arrivant à un instant uniformément réparti dans cet intervalle attend en moyenne la moitié de celui-ci :

$$T_c = \frac{1}{2 \times 6 \times 50} = 1,667 \text{ ms}, \quad (12)$$

modélisé par un premier ordre $1/(T_c s + 1)$.

En combinant les deux, le redresseur est représenté par l'unique bloc du premier ordre qui figure dans le schéma-bloc Simulink :

$$\frac{U_a(s)}{U_{cm}(s)} = \frac{K_c}{T_c s + 1} = \frac{22}{T_c s + 1}. \quad (13)$$

L'intérêt d'une fonction de transfert est qu'elle fait du convertisseur un élément linéaire, intégrable à la fonction de transfert de boucle, ce qui permet de régler le PID de courant sous forme close (section 4). Le modèle commuté est conservé à part, à la section 6, afin de vérifier que les régulateurs synthétisés sur le modèle moyen se comportent encore correctement en présence de l'ondulation réelle, du temps mort et du caractère discret de l'amorçage. C'est le même choix méthodologique que dans toute étude de convertisseur : synthétiser sur le modèle moyen, vérifier sur le modèle commuté.

Le gain statique fixe également le gain du procédé de la boucle de courant :

$$b = \frac{K_c}{R_a} = \frac{22}{2,33} = 9,442 \quad [\text{A par unité de commande}], \quad (14)$$

c'est-à-dire commande vers tension par $\times 22$, puis tension vers courant par $\times 1/R_a$.

3 Fonction de transfert du procédé et réalisation en schéma-bloc

3.1 Établissement

En prenant les transformées de Laplace des deux bilans de la section 1, la charge s'écrivant comme un terme visqueux $C_r = K_r \omega$:

$$U_a = (R_a + (L_a + L_f)s)I_a + k\Phi \Omega, \quad Js \Omega = k\Phi I_a - (f_r + K_r)\Omega. \quad (15)$$

L'élimination de I_a redonne (3). Le dénominateur est du second ordre, comme on l'attend d'un système à un réservoir d'énergie électrique et un réservoir mécanique, et le terme $k\Phi^2$ est la contribution de la force contre-électromotrice, qui agit comme une contre-réaction interne et rend une machine non régulée naturellement stabilisante.

3.2 Le schéma-bloc de la machine

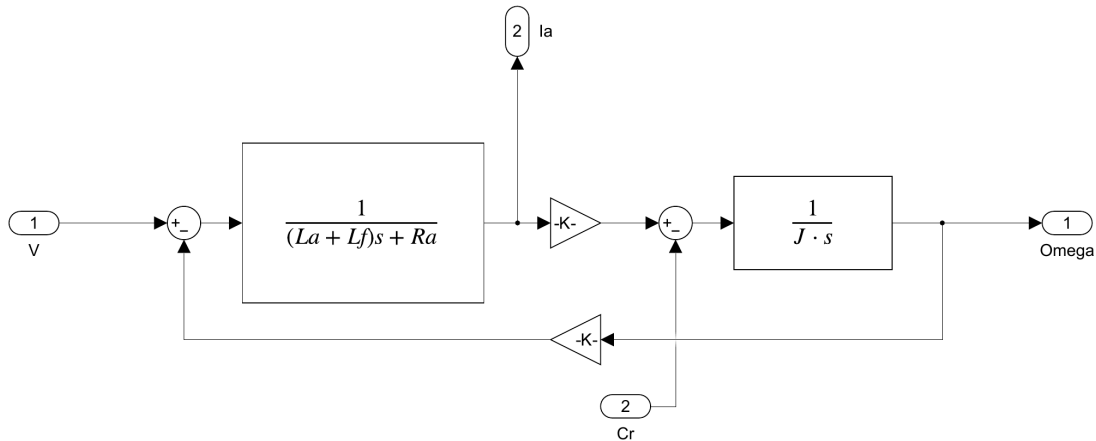


Fig. 2. Le sous-système *Moteur DC* : l'admittance d'induit $1/((L_a + L_f)s + R_a)$ produit le courant, $k\Phi$ le convertit en couple, $1/(Js)$ intègre en vitesse, et $k\Phi \omega$ est réinjecté comme f.é.m.

Le sous-système de la figure 2 réalise (3) sous forme de schéma-bloc explicite plutôt que sous forme d'un bloc de fonction de transfert. Ce n'est pas un choix cosmétique : il rend le courant interne disponible pour la mesure, ce qu'exige la boucle interne, et il fait apparaître le chemin de f.é.m., dont on peut ainsi observer le rôle. En suivant le schéma, la tension d'induit V se voit retrancher la f.é.m. $k\Phi \omega$, attaque l'admittance d'induit pour donner le courant I_a , lequel est multiplié par $k\Phi$ pour donner le couple; le couple de charge C_r est soustrait et le couple net est intégré par $1/(Js)$ en vitesse :

$$I_a = \frac{V - k\Phi \Omega}{(L_a + L_f)s + R_a}, \quad \Omega = \frac{k\Phi I_a - C_r}{Js}. \quad (16)$$

En substituant l'une dans l'autre, on retrouve exactement $G(s)$, ce qui confirme la concordance du schéma-bloc et du modèle analytique.

3.3 Fixation du point de fonctionnement

La charge n'est pas un paramètre libre. Puisque l'étude fixe à la fois la tension d'induit et la vitesse obtenue, le coefficient de charge visqueuse K_r doit être calculé à rebours pour que le point de fonctionnement demandé soit exactement le régime permanent de la machine. En annulant di_a/dt et $d\omega/dt$ dans (1) et (2) puis en résolvant en K_r :

$$K_r = \frac{1}{R_a} \left(\frac{k\Phi U_a}{\omega^*} - k\Phi^2 \right) - f_r. \quad (17)$$

Avec $U_a = 220 \text{ V}$ et $\omega^* = 3000 \times 2\pi/60 = 314,16 \text{ rad/s}$, on obtient $K_r = 0,03170$, un gain statique $G(0) = 1,428 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$ et donc $\omega_{ss} = G(0) \times 220 = 3000,0 \text{ tr/min}$. La construction est cohérente, ce qui constitue une vérification utile qu'aucune conversion d'unités n'a été oubliée.

Deux constantes de temps caractéristiques en découlent, utilisées dans le réglage :

$$\tau_e = \frac{L_a + L_f}{R_a} = 0,1230 \text{ s}, \quad \tau_m = \frac{JR_a}{k\Phi^2} = 0,0538 \text{ s}. \quad (18)$$

Il vaut la peine de s'arrêter sur leur rapport. Dans la plupart des petites machines à courant continu, la constante de temps électrique est bien plus courte que la mécanique, et l'argument classique de la cascade, qui suppose le courant établi avant que la vitesse ne bouge, s'ensuit immédiatement. Ici, τ_e vaut plus du double de τ_m , parce que l'inductance de lissage de 276 mH a rendu le circuit électrique anormalement lent. La séparation des échelles de temps ne provient donc pas de la machine : elle doit être créée par les régulateurs, et c'est exactement ce que fait le choix $t_{r,i} = 0,1 \text{ s}$ contre $t_{r,w} = 1 \text{ s}$. Le régulateur de courant doit activement accélérer la dynamique électrique.

4 Synthèse des régulateurs

Les deux régulateurs sont réalisés par le bloc *PID* de Simulink en forme parallèle, l'option à deux degrés de liberté étant désactivée, $C(s) = K_p + K_i/s + K_d \frac{N}{1 + N/s}$ avec un coefficient de filtrage de la dérivée $N = 100$; la boucle de vitesse n'utilise que les termes PI.

Ils sont réglés analytiquement à partir de deux idées. La première est la compensation pôle-zéro : les zéros du régulateur sont placés sur les pôles du procédé, de sorte que la boucle ouverte devienne un intégrateur pur, dont la boucle fermée est un premier ordre de constante de temps exactement connue. La seconde est un critère de temps de réponse : un premier ordre de constante de temps τ atteint 99 % de sa valeur finale au bout de $t_s = -\ln(0,01) \tau \approx 4,6 \tau$, d'où le facteur 4,6 récurrent.

4.1 Boucle interne de courant

En négligeant le couplage par la f.é.m., ce qui est légitime car la vitesse varie bien plus lentement que le courant dans la bande passante de cette boucle, le procédé de la commande au courant est le retard du convertisseur en série avec le retard électrique d'induit :

$$P_i(s) = \frac{b}{(1 + \tau_e s)(1 + T_c s)}, \quad b = \frac{22}{R_a} = 9,442. \quad (19)$$

En écrivant le PID avec ses zéros apparents et en choisissant

$$\frac{K_p}{K_i} = \tau_e + T_c, \quad \frac{K_d}{K_i} = \tau_e T_c, \quad (20)$$

son numérateur se factorise en $(1 + \tau_e s)(1 + T_c s)$, ce qui compense les deux pôles du procédé. La boucle ouverte se réduit à $L(s) = K_i b/s$ et la boucle fermée est du premier ordre avec $\tau_{bf} = 1/(K_i b)$. En imposant $t_s = 4,6 \tau_{bf} = t_{r,i}$, les gains sont fixés :

$$K_i = \frac{4,6}{t_{r,i} b}, \quad K_p = (\tau_e + T_c) K_i, \quad K_d = \tau_e T_c K_i. \quad (21)$$

Pour $t_{r,i} = 0,1$ s, cela donne $K_i = 4,872$, $K_p = 0,607$ et $K_d = 0,001$. Le terme dérivé est très faible parce que T_c l'est aussi : en pratique, le régulateur est un PI assorti d'une correction mineure pour le temps mort du convertisseur. C'est exactement ce à quoi l'on s'attend, l'action dérivée n'existant que pour compenser le pôle le plus rapide, lequel est presque à l'infini à l'échelle de temps de la boucle.

4.2 Boucle externe de vitesse

La boucle de courant étant rapide et de gain proche de l'unité dans sa bande passante, le procédé mécanique vu par le régulateur de vitesse se réduit à un premier ordre entre demande de courant et vitesse,

$$P_\omega(s) = \frac{a}{1 + \frac{J}{k}s}, \quad a = \frac{k\Phi}{k} = 45,6, \quad (22)$$

où $k = 1,25 \times 10^{-2}$ est l'amortissement équivalent et la mise à l'échelle de mesure employés dans les modèles. Un régulateur PI compense le pôle mécanique lorsque $K_p/K_i = J/k$, ce qui réduit à nouveau la boucle ouverte à $K_i a/s$; en imposant $t_s = 4,6/(K_i a) = t_{r,w}$:

$$K_i = \frac{4,6}{t_{r,w} a}, \quad K_p = \frac{J}{k} K_i. \quad (23)$$

Pour $t_{r,w} = 1$ s, on obtient $K_i = 0,1009$ et $K_p = 0,0605$.

Tab. 3. Gains des régulateurs obtenus analytiquement.

Boucle	Type	K_p	K_i	K_d	Réponse visée
Courant (interne)	PID	0,607	4,872	0,001	$t_{r,i} = 0,1$ s
Vitesse (externe)	PI	0,0605	0,1009	—	$t_{r,w} = 1$ s

4.3 Unités, mise à l'échelle et limitation

Dans les modèles, la vitesse est mesurée à travers un gain de mise à l'échelle $k = 1,25 \times 10^{-2}$, et la consigne comme l'affichage utilisent les conversions $60/2\pi$ de rad/s vers tr/min et $2\pi/60$ en sens inverse. Ces facteurs n'ont aucun effet dynamique mais doivent être appliqués de façon cohérente : une conversion manquante modifierait le gain de boucle effectif d'un facteur voisin de 9,55 et invaliderait silencieusement le réglage.

La consigne de courant est écrêtée par un bloc de saturation. C'est cet élément qui justifie à lui seul de construire une cascade : sans lui, un grand échelon de vitesse appellerait un courant

arbitrairement élevé, auquel les thyristors ne survivraient pas. Avec lui, un grand échelon produit simplement une accélération à courant constant, donc à couple constant, jusqu'à ce que l'erreur de vitesse devienne assez faible pour que la boucle retrouve son domaine linéaire.

4.4 Un réglage alternatif pour un couple de charge constant

Lorsque le couple de charge est constant plutôt que visqueux, la boucle de vitesse peut être réglée par placement de pôles direct du second ordre, avec un coefficient d'amortissement ζ et une pulsation propre ω_n choisis :

$$K_p = \frac{2\zeta\omega_n J}{k\Phi}, \quad K_i = \frac{\omega_n^2 J}{k\Phi}, \quad (24)$$

la boucle de courant utilisant alors $\tau_m = 53,8$ ms à la place de $\tau_e + T_c$. Cette variante est analysée à la section 5 parce qu'elle rend directement visibles les rôles distincts de ζ et de ω_n , que la synthèse par compensation pôle-zéro masque délibérément en imposant une réponse du premier ordre.

5 Vérification Python et étude paramétrique

La synthèse MATLAB a été réimplémentée indépendamment en Python, avec NumPy, SciPy et Matplotlib, pour deux raisons : confirmer le réglage sur une plateforme qui ne partage aucun code avec les modèles Simulink, et visualiser la dépendance de la réponse en boucle fermée vis-à-vis des objectifs t_r , ζ et ω_n .

5.1 Recouplement des grandeurs de synthèse

Tab. 4. Grandeurs de synthèse : MATLAB et implémentation Python indépendante.

Grandeur	MATLAB	Python
Coefficient de charge K_r	0,031697	0,031697
Gain statique $G(0)$	1,428 00	1,428 00
Vitesse en régime permanent	3000,0 tr/min	3000,0 tr/min
PID courant $K_p/K_i/K_d$	0,607 / 4,872 / 0,001	0,607 / 4,872 / 0,001
PI vitesse K_p/K_i	0,0605 / 0,1009	0,0605 / 0,1009

Les deux implémentations concordent à la précision affichée sur chaque grandeur. C'est le minimum attendu d'un portage correct, mais il vaut la peine de le consigner : un désaccord ici aurait révélé une erreur de conversion d'unités ou une interprétation différente de K_r , deux fautes faciles à commettre.

La figure 3 présente les deux boucles au point de fonctionnement nominal. La boucle de courant s'établit en 0,1 s environ et celle de vitesse en 1 s environ, exactement comme spécifié, et aucune ne présente de dépassement : la compensation pôle-zéro rend les deux boucles fermées du premier ordre par construction.

5.2 Premier ordre : le temps de réponse fixe le temps de montée

Après compensation pôle-zéro, la boucle de courant est exactement du premier ordre, $T(s) = 1/(1 + \tau s)$ avec $\tau = t_{r,i}/4,6$. Balayer l'objectif $t_{r,i}$ déplace l'unique pôle de boucle fermée

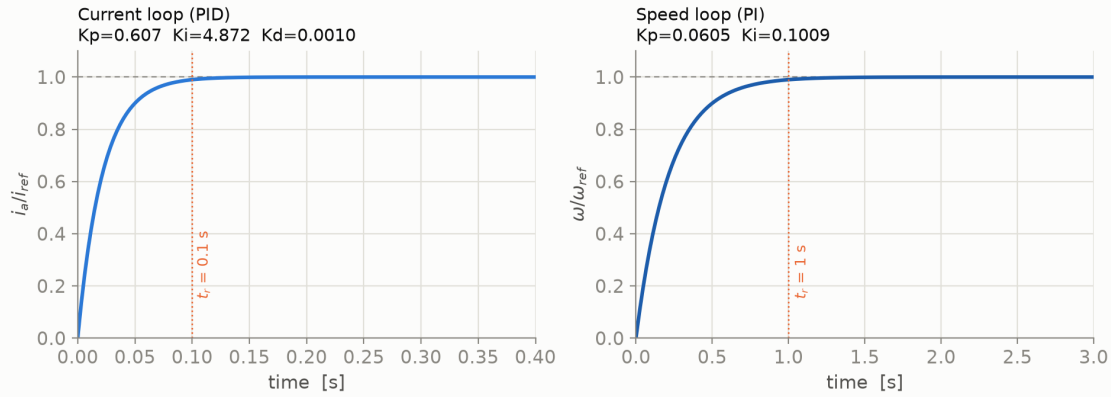
Designed operating point — 220 V / 3000 rpm (10× time-scale separation)

Fig. 3. Réponses indicielles au point de fonctionnement nominal : boucle interne de courant (à gauche) et boucle externe de vitesse (à droite), montrant la séparation d'échelles de temps de dix pour un.

le long de l'axe réel et met donc le temps de montée à l'échelle, sans dépassement quel que soit le réglage.

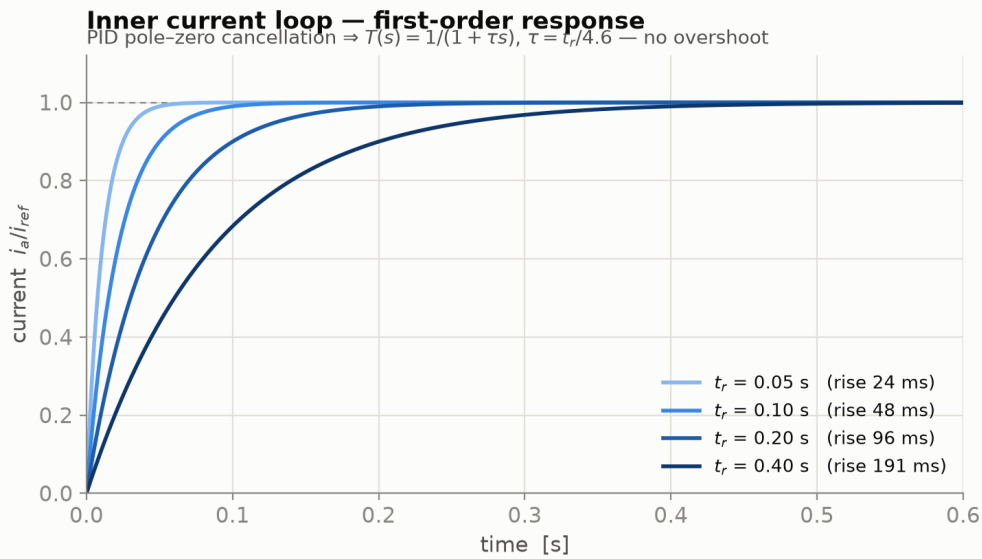


Fig. 4. Boucle de courant du premier ordre : l'objectif de temps de réponse fixe le temps de montée, sans dépassement quel que soit le réglage.

Les temps de montée mesurés du tableau 5 valent systématiquement 2,2 fois la constante de temps de boucle fermée, valeur théorique $\ln 9 \approx 2,197$ d'un système du premier ordre. Cet accord confirme que la compensation est exacte dans le modèle et qu'aucun pôle non modélisé n'interfère.

5.3 Second ordre : l'amortissement fixe le dépassement

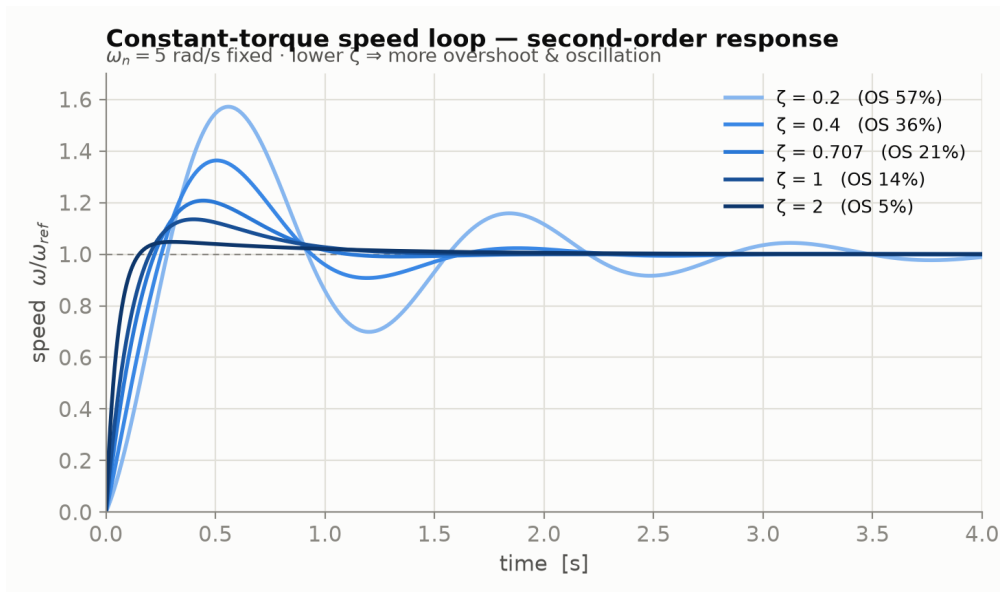
Pour la synthèse à couple constant de la section 4.4, la boucle de vitesse est du second ordre,

$$T(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (25)$$

Tab. 5. Boucle de courant du premier ordre : temps de montée en fonction du temps de réponse visé.

$t_{r,i}$	τ en boucle fermée	Temps de montée 10–90 %
0,05 s	10,9 ms	24 ms
0,10 s	21,7 ms	48 ms
0,20 s	43,5 ms	96 ms
0,40 s	87,0 ms	191 ms

En maintenant $\omega_n = 5$ rad/s et en balayant ζ , les pôles de boucle fermée passent de faiblement amortis à sur-amortis.

**Fig. 5.** Boucle de vitesse du second ordre : le coefficient d'amortissement fixe le dépassement et l'oscillation, à $\omega_n = 5$ rad/s constant.**Tab. 6.** Boucle de vitesse du second ordre : dépassement en fonction de l'amortissement.

ζ	Pôles de boucle fermée	Dépassement
0,2	complexes, faiblement amortis	57 %
0,4	complexes	36 %
0,707	complexes	21 %
1,0	amortissement critique, réels égaux	14 %
2,0	sur-amortis, réels distincts	5 %

Le dépassement est supérieur aux valeurs habituelles des manuels, 21 % au lieu de 4 % environ à $\zeta = 0,707$, et même le cas critique dépasse de 14 % au lieu de ne pas dépasser du tout. L'explication tient au numérateur : un régulateur PI apporte un zéro fini en $s = -\omega_n/(2\zeta)$, si bien que la fonction de transfert en boucle fermée ci-dessus n'est pas la forme canonique du second ordre des manuels, dont le numérateur est constant. Ce zéro dérive une partie de la consigne, ce qui accélère la montée mais amplifie le premier pic. C'est précisément pourquoi la synthèse nominale de la section 4 préfère la compensation pôle–zéro, qui produit une réponse

du premier ordre sans aucun dépassement.

5.4 Second ordre : la pulsation propre fixe le temps d'établissement

En maintenant $\zeta = 0,7$ et en balayant ω_n , la forme de la réponse est conservée et seul son axe des temps est mis à l'échelle : le temps d'établissement est inversement proportionnel à ω_n .

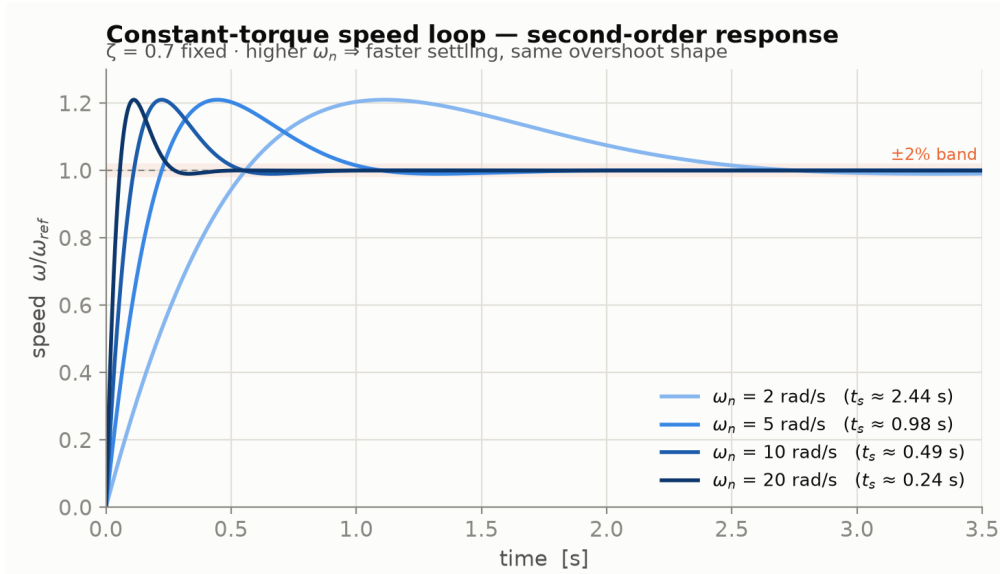


Fig. 6. Boucle de vitesse du second ordre : la pulsation propre fixe le temps d'établissement, à $\zeta = 0,7$ constant.

Tab. 7. Boucle de vitesse du second ordre : temps d'établissement en fonction de la pulsation propre.

ω_n	Temps d'établissement à $\pm 2\%$
2 rad/s	2,44 s
5 rad/s	0,98 s
10 rad/s	0,49 s
20 rad/s	0,24 s

Le produit $\omega_n t_s$ reste constant autour de 4,9 sur tout le balayage, comme l'exige la théorie. Les deux paramètres agissent donc comme des leviers de conception indépendants : ω_n est le levier de bande passante, donc de rapidité, et ζ celui de l'amortissement, donc du dépassement. Dans la machine réelle, ω_n est en dernier ressort plafonné par la bande passante de la boucle interne de courant, ce qui explique le besoin de séparation des échelles de temps de la cascade et le fait qu'une bande passante ne peut pas être augmentée à volonté.

6 Modèles Simulink et résultats

Trois modèles complémentaires ont été construits, par ordre croissant de fidélité physique. Les schémas qui suivent sont exportés directement des modèles, exécutés sur un solveur powergui continu.

6.1 Schéma-bloc en fonctions de transfert

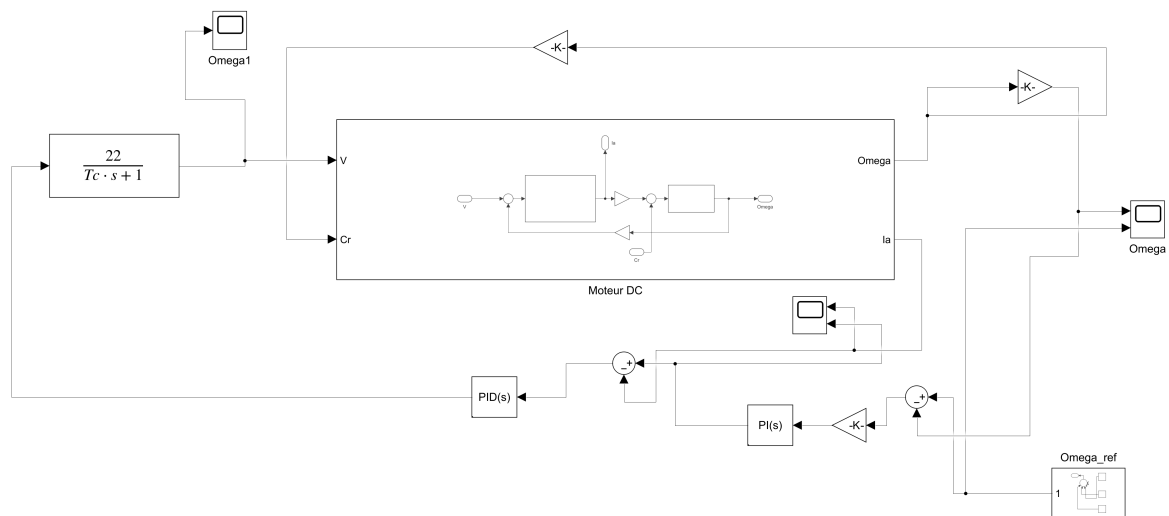


Fig. 7. Schéma-bloc de la cascade en fonctions de transfert : le modèle de synthèse idéalisé, en correspondance directe avec les sections 2 à 4.

Le modèle de la figure 7 est la réalisation idéalisée correspondant exactement à l'analyse : le convertisseur moyen est le bloc $22/(T_c s + 1)$ de l'équation (13), la machine est le sous-système de la figure 2, et les correcteurs sont le PID interne et le PI externe du tableau 3. Puisqu'il s'agit du modèle de synthèse, sa réponse constitue la référence à laquelle les autres sont comparées : le courant s'établit en 0,1 s environ et la vitesse atteint 3000 tr/min en 1 s environ, avec un faible dépassement, conformément à l'intention.

6.2 Modèle intermédiaire à machine physique

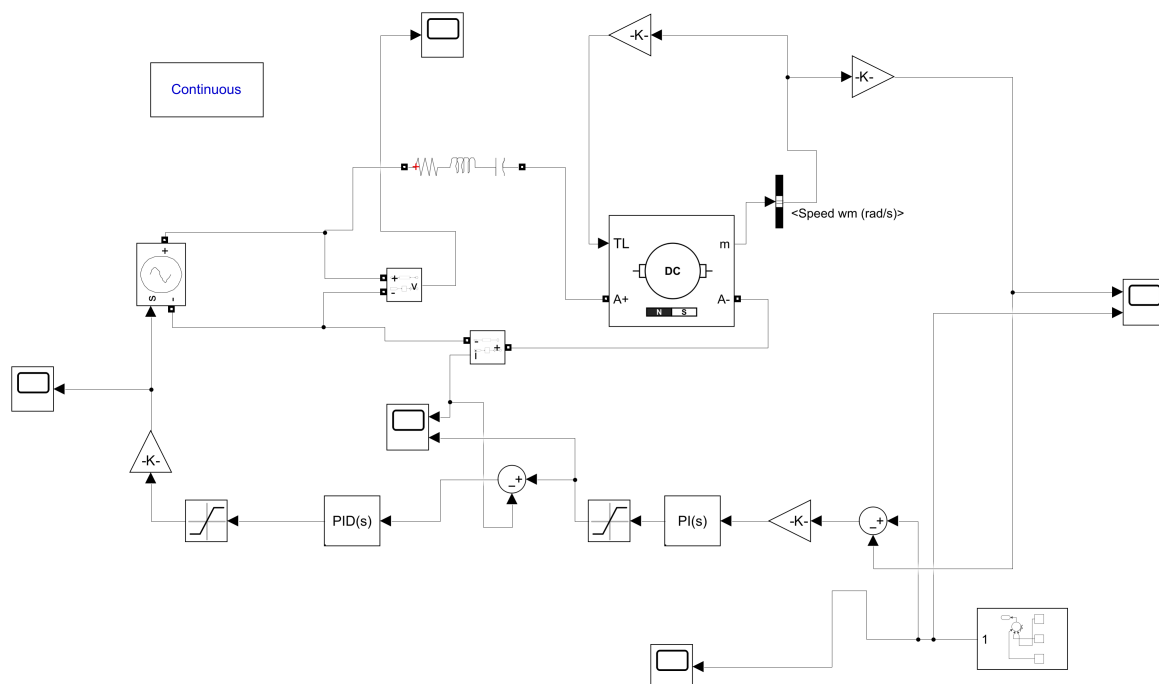


Fig. 8. Modèle physique intermédiaire : le bloc Simscape *DC Machine* véritable, alimenté par une source de tension commandée moyennée.

La figure 8 est un palier délibéré. Elle conserve le bloc physique *DC Machine*, de sorte que les dynamiques électrique et mécanique soient celles, authentiques, de Simscape plutôt qu'un schéma-bloc construit à la main, mais elle alimente la machine par une source de tension commandée et non par le pont complet. Le gain de la source, $\frac{3\sqrt{6}}{\pi} \cdot \frac{220}{10}$, traduit la même idée de convertisseur moyen que le facteur 22 de la section 2.4.

L'intérêt de ce palier est diagnostique. Si l'entraînement se comporte correctement ici mais pas dans le modèle complet de la section suivante, l'écart provient nécessairement du convertisseur ; s'il se comporte déjà mal ici, le problème réside dans le modèle de machine ou dans le réglage. Construire la hiérarchie dans cet ordre isole les deux sources d'erreur au lieu de les affronter simultanément.

6.3 Modèle physique complet avec pont à thyristors commuté

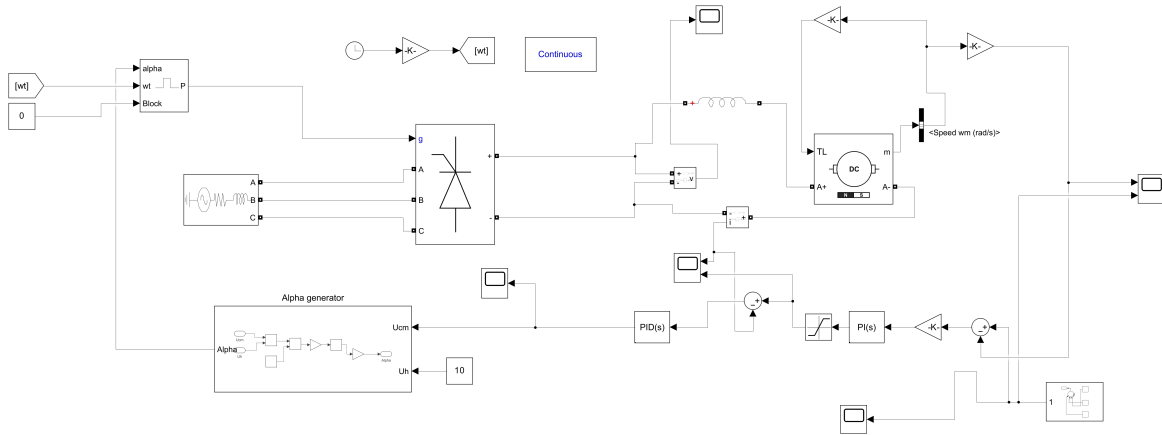


Fig. 9. Modèle physique complet : source triphasée, pont à thyristors à six pulsations, générateur d'angle d'amorçage et générateur d'impulsions synchronisé, inductance de lissage et machine à courant continu.

La figure 9 est le modèle de plus haute fidélité, construit entièrement à partir de blocs de la bibliothèque Simscape Electrical : la source triphasée, le pont à thyristors à six pulsations, le générateur d'angle d'amorçage de la figure 1 et son générateur d'impulsions synchronisé, l'inductance de lissage de 276 mH et le bloc *DC Machine*, avec les mêmes régulateurs en cascade.

Par rapport au modèle moyen, il fait apparaître exactement les phénomènes que le réglage a été conçu pour tolérer :

- l'ondulation de courant à 300 Hz, que l'inductance de lissage atténue sans la supprimer, et que le régulateur de courant ne doit pas chercher à suivre ;
- le temps mort d'amorçage $T_c = 1,667$ ms, incorporé aux gains de la boucle de courant par le terme $\tau_e + T_c$ et par K_d ;
- le caractère discret de la conduction des thyristors, qui interdit au convertisseur de réagir entre deux amorçages, quelle que soit la commande.

Le terme de temps mort dans le PID et la saturation sur la consigne de courant maintiennent l'entraînement stable et limité en courant malgré l'ondulation, et le courant et la vitesse moyens atteignent toujours l'objectif de 3000 tr/min. C'est le résultat que visait toute la synthèse sur modèle moyen, et il vaut la peine d'énoncer explicitement ce qu'il démontre : non pas que le modèle moyen soit précis, puisqu'il écarte manifestement l'ondulation, mais que le régulateur synthétisé sur ce modèle est robuste à ce qu'il écarte.

7 Discussion et limites

Fonctionnement effectif en un seul quadrant de courant. Le pont est quatre quadrants en tension mais un seul quadrant en courant, les thyristors ne conduisant que dans un sens. Le freinage récupératif exige donc que la machine conserve le signe de son courant pendant que la tension s'inverse, ce qui est possible pour un moteur dont la vitesse s'inverse mais non pour un moteur dont le couple doit s'inverser à vitesse constante. Un entraînement véritablement quatre quadrants exige deux ponts tête-bêche et une stratégie de basculement, hors du périmètre de cette étude.

Excitation constante. Toute l'analyse repose sur la constance de $k\Phi$, ce qui restreint le fonctionnement à la zone en dessous de la vitesse de base. Fonctionner au-delà exigerait un défluxage, donc une seconde boucle, lente, sur le courant d'excitation, et ferait de $k\Phi$ une variable dans chacune des équations de la section 3.

Le modèle de charge. La charge a été représentée comme purement visqueuse, K_r étant calculé à rebours depuis le point de fonctionnement voulu par (17). Ce choix est commode car il rend le point de fonctionnement exact par construction, mais c'est aussi une hypothèse forte : une charge réelle à couple constant, ou à couple proportionnel au carré de la vitesse comme un ventilateur, modifierait le gain en petits signaux du procédé et donc le réglage effectif des boucles. La synthèse alternative de la section 4.4 existe précisément pour couvrir le cas du couple constant.

Empiètement de commutation négligé. Le modèle moyen de l'équation (6) suppose la commutation instantanée. Dans un pont réel, l'inductance de source provoque un angle d'empiètement pendant lequel deux thyristors du même groupe conduisent simultanément, ce qui réduit la tension moyenne de sortie d'un terme proportionnel au courant de charge. Cela se traduit par une résistance apparente supplémentaire en série avec l'induit et, à fort courant, décalerait légèrement le point de fonctionnement sous la valeur prédite.

8 Conclusion

Une régulation en cascade vitesse et courant pour une machine à courant continu à excitation séparée alimentée par thyristors a été développée dans le détail. Le redresseur commandé a été analysé à partir des principes, du pont à six pulsations et de sa loi de tension en cosinus jusqu'au générateur d'angle d'amorçage dont la loi en arc cosinus linéarise le convertisseur, puis condensé dans le modèle moyen $22/(T_c s + 1)$, dont le gain et le retard ont été tous deux établis à partir des grandeurs propres de l'entraînement plutôt que postulés.

Sur ce procédé linéaire, les gains PI et PID ont été obtenus analytiquement par compensation pôle-zéro associée à un critère de temps de réponse. La conception obtenue a des objectifs transparents et réglables indépendamment : un nombre fixe le temps de réponse de la boucle de courant, un autre celui de la boucle de vitesse, et le rapport entre les deux constitue la séparation d'échelles de temps qui valide la cascade. Le même cadre accueille également la synthèse alternative à couple constant, où les rôles du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre deviennent explicites.

La conception a été vérifiée deux fois. L'implémentation Python indépendante a reproduit chaque grandeur de synthèse à la précision affichée et a quantifié les dépendances

paramétriques, confirmant le comportement du premier ordre de la boucle de courant, la dépendance du dépassement en ζ et celle du temps d'établissement en $1/\omega_n$, y compris l'effet du zéro du PI qui rend le dépassement supérieur aux valeurs canoniques du second ordre. La hiérarchie de modèles Simulink, aboutissant au pont réellement commuté, a ensuite confirmé le comportement attendu au point de fonctionnement 220 V et 3000 tr/min, en présence de l'ondulation réelle, du temps mort d'amorçage et de la conduction discrète des thyristors.

Références

- [1] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*, 3^e éd. Berlin, Springer, 2001.
- [2] N. Mohan, T. M. Undeland et W. P. Robbins, *Power Electronics : Converters, Applications and Design*, 3^e éd. Hoboken, Wiley, 2003.
- [3] G. Séguier, *Les convertisseurs de l'électronique de puissance — La conversion alternatif-continu*, 2^e éd. Paris, Lavoisier, 1992.
- [4] P. C. Sen, *Thyristor DC Drives*. New York, Wiley, 1981.
- [5] R. Krishnan, *Electric Motor Drives : Modeling, Analysis and Control*. Upper Saddle River, Prentice Hall, 2001.
- [6] K. J. Åström et T. Hägglund, *Advanced PID Control*. Research Triangle Park, ISA, 2006.

A Récapitulatif des calculs de synthèse

Le tableau 8 rassemble toute la chaîne de synthèse dans l'ordre où les grandeurs sont calculées, afin que les résultats numériques puissent être reproduits.

Tab. 8. Chaîne de synthèse, dans l'ordre de calcul.

Étape	Expression	Valeur	Unité
Vitesse visée en rad/s	$3000 \times 2\pi/60$	314,16	rad/s
Coefficient de charge	éq. (17)	0,031 697	N·m·s
Gain statique	$G(0)$	1,428 00	rad·s ⁻¹ /V
Vérification du régime	$G(0) \times 220$	3000,0	tr/min
Constante de temps électrique	$(L_a + L_f)/R_a$	0,1230	s
Constante de temps mécanique	$JR_a/k\Phi^2$	0,0538	s
Gain du convertisseur	220/10	22	V/unité
Retard du convertisseur	$1/(2 \times 6 \times 50)$	1,667	ms
Gain du procédé de courant	K_c/R_a	9,442	A/unité
K_i courant	$4,6/(t_{r,i} b)$	4,872	—
K_p courant	$(\tau_e + T_c)K_i$	0,607	—
K_d courant	$\tau_e T_c K_i$	0,001	—
Gain de la boucle de vitesse	$k\Phi/k$	45,6	—
K_i vitesse	$4,6/(t_{r,w} a)$	0,1009	—
K_p vitesse	$(J/k)K_i$	0,0605	—

B Organisation des modèles fournis

Tab. 9. Organisation du code et des modèles accompagnant le rapport.

Chemin	Contenu
MATLAB/Main & Setup/	main.m, dc_machine_params.m, dc_tf_function.m
MATLAB/PID Block Diagram/	modèle en schéma-bloc de fonctions de transfert
MATLAB/Library/	modèle Simscape Electrical avec pont à thyristors
MATLAB/assets/	schémas exportés des modèles
Python/	portage indépendant reproduisant le réglage et les balayages
Python/results/	figures de réponse et d'étude paramétrique de la section 5

Pour reproduire les résultats, ouvrir `main.m`, choisir le jeu de paramètres machine, la tension d'induit et la vitesse visées, puis l'exécuter. Le script affiche les gains réglés et peuple l'espace de travail, après quoi n'importe lequel des modèles Simulink peut être ouvert et lancé. Les scripts Python sont autonomes et régénèrent directement les figures de la section 5.